2017 年全国初中数学联合竞赛福建省赛区
初赛试题参考答案及评分标准

（2 月 26 日上午 9：30——11：00）

说明：评阅试卷时，请依据本评分标准.选择题和填空题只设 7 分和 0 分两档；解答题，请按照本评分标准规定的评分档次给分.如果考生的解答方法和本解答不同，只要思路合理，步骤正确，在评卷时请参照本评分标准划分的档次，给予相应的分数.

一、选择题（本题满分 42 分，每小题 7 分）

1． 关于 x 的方程 $|x-1|-2=a$ 恰有 1 个实数解，则 a 的值是 （ **C** ）

A． 0． B． -1． C． -2． D． -3．

解析 恰有一个实数解，只能 $a+2=0$，$a=-2$，这个解为 $x=1$．

2． 若 a 满足 $|2017-2016a|+\sqrt{a-2017}=2016a$，则 $a-2017^2$ 的值为 （ **C** ）

A． 2015． B．2016． C．2017． D．2018．

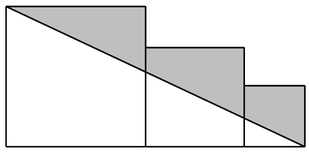
解析 由已知式子有 $a\geq 2017$，因此，原式可取绝对值，并化简，

$2016a-2017+\sqrt{a-2017}=2016a$，即 $\sqrt{a-2017}=2017$，两边平方，整理即得 $a-2017^2=2017$．

3. 如图三个正方形紧挨着，且有一边在同一条直线上，它们 边长分别为 5，3，2，则图中阴影部分面积为 （ **B** ）

A．12． B．13．

C．14． D．15．



解析 其阴影部分面积 $=5^2+3^2+2^2-\frac{1}{2}\times 5\times(5+3+2)=13$．

4． 已知 ΔABC 的三边长分别为 a,b,c，它的半周长 $p=4$，设

$l=\dfrac{4a^2b^2-(a^2+b^2-c^2)^2}{(p-a)(p-b)(p-c)}$，则 $l=$ （ **D** ）

A． 8. B． 16. C．32. D．64.

解析

$$l=\frac{4a^2b^2-(a^2+b^2-c^2)^2}{(\frac{a+b+c}{2}-a)(\frac{a+b+c}{2}-b)(\frac{a+b+c}{2}-c)}=\frac{8(2ab+a^2+b^2-c^2)(2ab-a^2-b^2+c^2)}{(-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c)}$$

$$=\frac{8[(a+b)^2-c^2][c^2-(a-b)^2]}{(-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c)}=\frac{8(a+b+c)(-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c)}{(-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c)}$$

5． 一列有规律的数，第 n 项用 a_n 表示，n 为正整数，

$a_1=1$，$a_2=\sqrt{3-2\sqrt{1\times 2}}$，$a_3=\sqrt{5-2\sqrt{2\times 3}}$，$a_4=\sqrt{7-2\sqrt{3\times 4}}$，$a_5=\sqrt{9-2\sqrt{4\times 5}}$，

$a_6=\sqrt{11-2\sqrt{5\times 6}}$，…….设 $x=a_1+a_2+\cdots+a_{2017}$，则 $2016-x^2=$ （ **A** ）

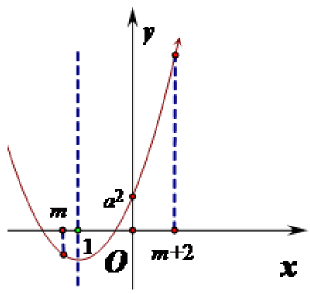
A．−1. B． 0. C． $\frac{1}{2}$. D． 1.

解析 $x = a_1 + a_2 + \cdots + a_{2017} = 1 + (\sqrt{2} - 1) + (\sqrt{3} - \sqrt{2}) + \cdots + \sqrt{2017} - \sqrt{2016})$ $= \sqrt{2017}$，因此，$2016 - x^2 = 2016 - 2017 = -1$.

6．已知二次函数 $y = x^2 + 2x + a^2$，当 $x = m$ 时，函数值 $y < 0$，则当 $x = m + 2$ 时，函数值 y （ **C** ）

A．小于 0． B．等于 0． C．大于 0． D．与 0 的大小不能确定．

解析一 由二次函数的三项系数特征和 $y_1 < 0$，可画出二次函数的图象，由图可得 y_2 大于 0.



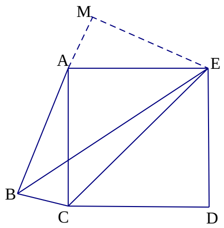
解析二 由于 $x = m$ 时，$y = m^2 + 2m + a^2 < 0$，即 $(m+1)^2 - (1 - a^2) < 0$，得到 $-\sqrt{1 - a^2} < m + 1 < \sqrt{1 - a^2}$，于是，$m + 2 = 1 - \sqrt{1 - a^2} > 0$，由此得到当 $x = m+2$ 时 $y = (m+2)^2 + 2(m+2) + a^2 > 0$.

二、填空题（本题满分 28 分，每小题 7 分）

7．计算 $\left(\frac{1+\sqrt{3}}{2}\right)^4 - \left(\frac{1-\sqrt{3}}{2}\right)^4 = \underline{\mathbf{2\sqrt{3}}}$.

解析 $\left(\frac{1+\sqrt{3}}{2}\right)^4 - \left(\frac{1-\sqrt{3}}{2}\right)^4 = (1 + \frac{\sqrt{3}}{2})^2 - (1 - \frac{\sqrt{3}}{2})^2 = (\frac{7}{4} + \sqrt{3}) - (\frac{7}{4} - \sqrt{3}) = 2\sqrt{3}$.

8．在 ΔABC 中，$\angle ABC = 90°$，AB=12，AC=13. 若以 AC 为边作正方形 $ACDE$，那么 ΔBCE 的面积=$\underline{\mathbf{\frac{85}{2}}}$.



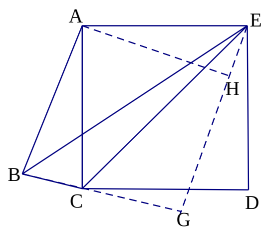
解析一 在 $Rt\Delta ABC$ 中，易知 $BC = \sqrt{AC^2 - AB^2} = \sqrt{13^2 - 12^2} = 5$.

从 E 作直线 BA 垂线段 EM，垂足为 M（如上中间图形），则 $ME // BC$.

在 $Rt\Delta EMA$ 和 $Rt\Delta ABC$ 中，$\angle EMA = \angle ABC = 90^0$，

$\angle MEA = 90^0 - \angle MAE = \angle BAC$（注意到 $\angle MAE + \angle BAC = 90^0$），$EA = AC$，因此，$\Delta EMA \cong \Delta ABC$，得到 $MA = BC = 5$，所以，$MB = MA + AB = 5 + 12 = 17$，

$S_{\Delta BCE} = \frac{1}{2} BC \cdot BM = \frac{85}{2}$.



解法二 在 $Rt\Delta ABC$ 中，易知 $BC = \sqrt{AC^2 - AB^2} = \sqrt{13^2 - 12^2} = 5$.

过 E 作直线 BC 的垂线交于 G，过 A 作直线 EG 的垂线交于 H（如上右边图形），则四边形 $ABGH$ 为矩形，在 $Rt\Delta AHE$ 和 $Rt\Delta ABC$ 中，$\angle AHE = \angle ABC = 90^0$，$\angle HAE = 90^0 - \angle CAH = \angle BAC$，$AE = AC$，

因此，$\Delta AHE \cong \Delta ABC$，则 $HE = BC$，所以

$EG = GH + HE = BA + BC = 12 + 5 = 17$，故 $S_{\Delta BCE} = \frac{1}{2} BC \cdot EG = \frac{1}{2} \times 5 \times 17 = \frac{85}{2}$.

9. 设 A、B、C 为 1—9 中的任意数字，$\overline{BC}, \overline{CA}, \overline{AB}$ 都表示两位数，那么 $A \times \overline{BC} + B \times \overline{CA} + C \times \overline{AB}$ 一定能被 $\underline{\mathbf{11}}$ 整除.

解析 $A\times BC+B\times CA+C\times AB\ =A\times(10B+C)+B\times(10C+A)+C\times(10A+B)$

$=11\times(B\times C+C\times A+A\times B)$.

10．已知a，b是实数，那么代数式$3a^2-2ab+5b^2-2a-4b+2$的最小值是$\underline{\boldsymbol{\frac{1}{2}}}$．．

解析 $3a^2-2ab+5b^2-2a-4b+2=\left(a-b\right)^2+2\left(a-\frac{1}{2}\right)^2+4\left(b-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{2}\ge\frac{1}{2}$，

故代数式$3a^2-2ab+5b^2-2a-4b+2$的最小值是$\frac{1}{2}$，取得最小值时，$a=b=\frac{1}{2}$.

三、解答题：共 3 小题，第 11 题 20 分，第 12、13 题各 25 分，满分 70 分.

11．**（本题满分 20 分）**

已知二次函数$y=2(m+1)x^2-(m+3)x-(m+2)$（$m\neq-1$）.

（1） 求证：此函数的图像必与x轴有交点；

（2） 若关于x的一元二次方程$2(m+1)x^2-(m+3)x-(m+2)=0$有一个大于 1 的实数根，求m的取值范围.

解 （1）由于$\Delta=[-(m+3)]^2-4\cdot2(m+1)([-(m+2)]=(3m+5)^2\ge0$，因此，此函数的图像必与$x$轴有交点.

（1）的另一解法，也可以由以下（2）解法中所得到的$\therefore x=-\frac{1}{2}$，即知函数的图像必与$x$轴有交点（$-\frac{1}{2},0$）.　（5 分）

(2) $\because 2(m+1)x^2-(m+3)x-(m+2)=0$,

$\therefore (2x+1)[(m+1)x-(m+2)]=0$，　(10 分)

$\because m\neq-1$，

$\therefore x=-\frac{1}{2}$，或$x=\frac{m+2}{m+1}$，

由题意得到

$$\frac{m+2}{m+1}>1,$$　（15 分）

即有

$$\frac{1}{m+1}>0,$$

因此得到$m>-1$.　（20 分）

12.（本题满分 25 分）

等腰梯形$ABCD$的对角线AC与BD交于点P，直线BA与CD交于点Q．过点Q作BC的平行线交BD于点M，ΔACM的外接圆与BD交于另一点E．直线AD与CE交于点N.求证: （1）$\Delta ADM\backsim\Delta NAC$；

（2）$BE=ED$.

证明 (1) 在等腰梯形$ABCD$中，

$\because \angle BAC=\angle BDC=\angle QDM$，$\angle NAB=\angle QAD=\angle QDA$，

$\therefore \angle NAC = \angle NAB + \angle BAC = \angle QDA + \angle QDM$.　　　　　　　　　　　　（5 分）

又　∵　$AECM$ 四点共圆，

∴　$\angle ACN = \angle AM$,

∴　$\Delta ADM \backsim \Delta NAC$.　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　（10 分）

（2）　由（1）$\Delta ADM \sim \Delta NAC$，所以 $\dfrac{AD}{AN} = \dfrac{DM}{AC} = \dfrac{DM}{DB}$.　　（※）　　　　　（15 分）

∴　$\dfrac{AD}{AN+AD} = \dfrac{DM}{DM\quad 1}$,

∴　$\dfrac{AD}{ND} = \dfrac{DM}{ME}$.　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　（20 分）

∵　$QM // AD // B$,

∴　$\dfrac{DM}{MB} = \dfrac{QD}{QC} = \dfrac{A}{B}$,

∴　$\dfrac{AD}{ND} = \dfrac{AI}{BC}$,

∴　$ND = BC$,

∴　$BE = EI$.　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　（25 分）

（2）另解　接（※）∵ $AD // QM$,所以 $\dfrac{DM}{DB} = \dfrac{AQ}{AB}$.所以 $\dfrac{AD}{AN} = \dfrac{AQ}{AB}$,(20 分)所以 $QD(DC) // BN$.又 $AD(DN) // BC$，所以四边形 $DCBN$ 是平行四边形，故 DB 与 NC 互相平分，所以 $BE = ED$.（25 分）

13. **（本题满分 25 分）**

已知 $y^2 - yz + z^2 = 1$， $z^2 - zx + x^2 = 2$， $x^2 - xy + y^2 = 3$.

求证：$\dfrac{1}{x+y-z} + \dfrac{1}{y+z-x} = \dfrac{2}{z+x-y}$

证明　由已知条件有

$$(z^2 - zx + x^2) - (y^2 - yz + z^2) = 1，$$　（5 分）

即

$$(x-y)(x+y-z) = 1，$$

由此得到

$$\frac{1}{x+y-z} = x - y，$$　（10 分）

同理，有

$$\frac{1}{y+z-x} = y - z，$$　（15 分）

$$\frac{2}{z+x-y} = x - z，$$　（20 分）

故得到

$$\frac{1}{x+y-z} + \frac{1}{y+z-x} = \frac{2}{z+x-y} .$$　（25 分）