2017 年全国初中数学联合竞赛（初二年级）试题参考答案及评分标准

说明：评阅试卷时，请依据本评分标准.第一试，选择题和填空题只设 7 分和 0 分两档；第二试各题，请按照本评分标准规定的评分档次给分.如果考生的解答方法和本解答不同，只要思路合理，步骤正确，在评卷时请参照本评分标准划分的档次，给予相应的分数.

第一试

一、选择题：（本题满分 42 分，每小题 7 分）

1．已知实数 a,b,c 满足 $2a+13b+3c=90$，$3a+9b+c=72$，则 $\dfrac{3b+c}{a+2b}=$ （　　）

A. 2.　　　　B. 1.　　　　C. 0.　　　　D. -1.

【答】B.

已知等式可变形为 $2(a+2b)+3(3b+c)=90$，$3(a+2b)+(3b+c)=72$，解得 $a+2b=18$，$3b+c=18$，所以 $\dfrac{3b+c}{a+2b}=1$.

2．已知实数 a,b,c 满足 $a+b+c=1$，$\dfrac{1}{a+1}+\dfrac{1}{b+3}+\dfrac{1}{c+5}=0$，则 $(a+1)^2+(b+3)^2+(c+5)^2=$ （　　）

A. 125.　　　　B. 120.　　　　C. 100.　　　　D. 81.

【答】C.

令 $a+1=x$，$b+3=y$，$c+5=z$，则 $x+y+z=(a+1)+(b+3)+(c+5)=10$，且

由 $\dfrac{1}{a+1}+\dfrac{1}{b+3}+\dfrac{1}{c+5}=0$ 得 $\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}=0$，所以 $xy+yz+zx=0$.

所以 $(a+1)^2+(b+3)^2+(c+5)^2=x^2+y^2+z^2=(x+y+z)^2-2(xy+yz+zx)=100$.

3．若正整数 a,b,c 满足 $a\le b\le c$ 且 $abc=2(a+b+c)$，则称 (a,b,c) 为好数组. 那么，好数组的个数为 （　　）

A. 4.　　　　B. 3.　　　　C. 2.　　　　D. 1.

【答】B.

若 (a,b,c) 为好数组，则 $abc=2(a+b+c)\le 6c$，所以 $ab\le 6$. 显然，a 只能为 1 或 2.

若 $a=2$，由 $ab\le 6$ 可得 $b=2$ 或 3，$b=2$ 时可得 $c=4$，$b=3$ 时可得 $c=\dfrac{5}{2}$（不是整数）；

若 $a=1$，则 $bc=2(1+b+c)$，于是可得 $(b-2)(c-2)=6$，可求得 $(a,b,c)=$（1，3，8）或（1，4，5）.

综合可知：共有 3 个好数组，分别为（2，2，4），（1，3，8）和（1，4，5）.

4．已知正整数a,b,c满足$a^2-6b-3c+9=0$，$-6a+b^2+c=0$，则$a^2+b^2+c^2=$　（　　）

A. 424.　　B. 430.　　C. 441.　　D. 460.

【答】C.

由已知等式消去c整理得$(a-9)^2+3(b-1)^2=75$，所以$3(b-1)^2\le 75$，又b为正整数，解得$1\le b\le 6$.

若$b=1$，则$(a-9)^2=75$，无正整数解；

若$b=2$，则$(a-9)^2=72$，无正整数解；

若$b=3$，则$(a-9)^2=63$，无正整数解；

若$b=4$，则$(a-9)^2=48$，无正整数解；

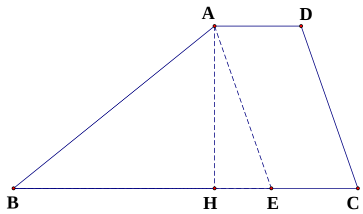
若$b=5$，则$(a-9)^2=27$，无正整数解；

若$b=6$，则$(a-9)^2=0$，解得$a=9$，此时$c=18$.

因此，$a=9$，$b=6$，$c=18$，故$a^2+b^2+c^2==441$.

5．梯形$ABCD$中，$AD//BC$，$AB=3$，$BC=4$，$CD=2$，$AD=1$，则梯形的面积为（　　）

A. $\frac{10\sqrt{2}}{3}$.　　B. $\frac{10\sqrt{3}}{3}$.　　C. $3\sqrt{2}$.　　D. $3\sqrt{3}$.



【答】A.

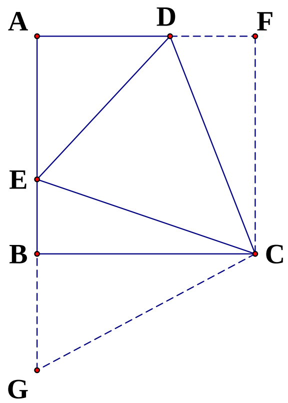
作$AE//DC$，$AH\perp BC$，则$ADCE$是平行四边形，所以$CE=AD=1$，$AE=CD=2$，从而$BE=BC-CE=4-1=3=AB$，所以$\triangle ABE$是等腰三角形，底边AE边上的高为$\sqrt{3^2-1^2}=2\sqrt{2}$.

所以$\triangle ABE$的面积$S=\frac{1}{2}\cdot AE\cdot 2\sqrt{2}=\frac{1}{2}\cdot BE\cdot AH$，故可得$AH=\frac{4\sqrt{2}}{3}$.

所以梯形的面积为$\frac{1}{2}\times(1+4)\times\frac{4\sqrt{2}}{3}=\frac{10\sqrt{2}}{3}$.

6．如图，梯形$ABCD$中，$AD//BC$，$\angle A=90°$，点E在AB上，若$AE=42$，$BE=28$，$BC=70$，$\angle DCE=45°$，则$DE=$　（　　）

A. 56.　　B. 58.　　C. 60.　　D. 62.



【答】B.

作$CF\perp AD$，交AD的延长线于点F，将$\triangle CDF$绕点C逆时针方向旋转$90°$至$\triangle CGB$，则$ABCF$为正方形，且$\angle ECG=45°=\angle ECD$，$CG=CD$，$CE=CE$，所以，$\triangle ECG\cong\triangle ECD$，所以$EG=ED$.

设$DE=x$，则$DF=BG=x-28$，$AD=70-DF=98-x$.

在Rt$\triangle$EAD中，有$42^2+(98-x)^2=x^2$，解得$x=58$.

二、填空题：（本题满分 28 分，每小题 7 分）

1．使得等式 $\sqrt{1+\sqrt{1+a}}=\sqrt[3]{a}$ 成立的实数 a 的值为_______.

【答】8．

由所给等式可得 $(1+\sqrt{1+a})^3=a^2$. 令 $x=\sqrt{1+a}$ ，则 $x\ge 0$ ，且 $a=x^2-1$ ，于是有 $(1+x)^3=(x^2-1)^2$ ，整理后因式分解得 $x(x-3)(x+1)^2=0$ ，解得 $x_1=0$ ， $x_2=3$ ， $x_3=-1$（舍去），所以 $a=-1$ 或 $a=8$.

验证可知： $a=-1$ 是原方程的增根， $a=8$ 是原方程的根.

所以， $a=8$.

2．已知△ ABC 的三个内角满足 $A<B<C<100^\circ$ ，用 θ 表示 $100^\circ-C,C-B,B-A$ 中的最小者，则 θ 的最大值为_______.

【答】20°.

因为 θ 表示 $100^\circ-C,C-B,B-A$ 中的最小者，所以 $\theta\le 100^\circ-C$ ， $\theta\le C-B$ ， $\theta\le B-A$ ，所以

$6\theta\le 3(100^\circ-C)+2(C-B)+(B-A)=300^\circ-(A+B+C)=120^\circ$，所以 $\theta\le 20^\circ$.

又当 $100^\circ-C=C-B=B-A=20^\circ$ ，即 $C=80^\circ,B=60^\circ,C=40^\circ$ 时，满足题设条件，故 θ 可取到 20°.

因此，θ 的最大值为 20°.

3．设 a,b 是两个互质的正整数，且 $p=\dfrac{8ab^3}{a+b}$ 为质数，则 $p=$_______.

【答】7.

因为 a,b 互质，所以 $a+b$ 与 a 和 b 都互质，而 $p=\dfrac{8ab^3}{a+b}$ 为质数，所以 $\begin{cases}ab^3=1,\\ \dfrac{8}{a+b}=p,\end{cases}$ 或 $\begin{cases}ab^3=p,\\ \dfrac{8}{a+b}=1.\end{cases}$

由 $\begin{cases}ab^3=1,\\ \dfrac{8}{a+b}=p,\end{cases}$ 可得 $a=b=1$， $p=4$ ，不合题意；

由 $\begin{cases}ab^3=p,\\ \dfrac{8}{a+b}=1.\end{cases}$ 可得 $a=7$ ， $b=1$， $p=7$ ，符合题意；

所以 $p=7$.

4．20 个都不等于 7 的正整数排列成一行，若其中任意连续若干个数之和都不等于 7，则这 20 个数之和的最小值为_______.

【答】34.

首先证明：对于任意 7 个正整数$b_1,b_2,\cdots,b_7$，其中一定存在若干个数（至少一个，也可以是全部）之和为 7 的倍数.

我们来考虑如下 7 个正整数

$$b_1,b_1+b_2,b_1+b_2+b_3,\cdots,b_1+b_2+\cdots+b_7 \qquad ①$$

如果①中 7 个正整数有一个是 7 的倍数，则结论成立.

如果①中 7 个正整数没有一个是 7 的倍数，则它们除以 7 所得的余数只能为 1，2，…，6 这 6 种情况．所以，其中一定有两个正整数除以 7 所得的余数相同，不妨设为$b_1+b_2+\cdots+b_i$和$b_1+b_2+\cdots+b_j$（$1\le i<j\le 7$），于是$b_{i+1}+\cdots+b_j$是 7 的倍数.所以，结论成立.

对于 20 个都不等于 7 的正整数$a_1,a_2,\cdots,a_{20}$中的任意 7 个数，由上述结论可知，其中一定有若干个数的和是 7 的倍数，又由题设知，它不等于 7，所以，它大于或等于 14.

又因为 20＝2×7＋6，所以

$$a_1+a_2+\cdots+a_{20}\ge 2\times 14+6=34 \qquad ②$$

另外，当$a_7=a_{14}=8$，$a_1,a_2,\cdots,a_{20}$中其余的数都为 1 时，$a_1+a_2+\cdots+a_{20}$＝34，即②式等号成立.

所以，$a_1+a_2+\cdots+a_{20}$的最小值为 34.

第二试

一、（本题满分 20 分）设A，B是两个不同的两位数，且B是由A交换个位数字和十位数字所得，如果A^2-B^2是完全平方数，求A的值.

解　设$A=10a+b$，a,b为正整数且$1\le a\le 9$，$1\le b\le 9$，$a\ne b$，则$B=10b+a$，

$A^2-B^2=(10a+b)^2-(10b+a)^2=99(a^2-b^2)=3^2\times 11\times(a-b)\times(a+b)$. ……………………**5 分**

因为A^2-B^2是完全平方数，所以$a>b$，且$11|(a-b)\times(a+b)$.

又$1\le a-b\le 8$，$1<a+b<18$，所以$a+b=11$. ……………………**10 分**

于是$A^2-B^2=3^2\times 11^2\times(a-b)$，故$a-b$也是完全平方数，所以$a-b$＝1 或 4.

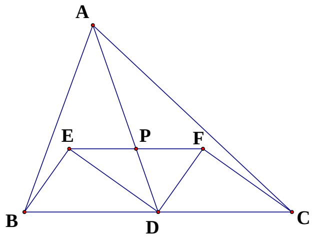
……………………**15 分**

如果$a-b$＝1，结合$a+b=11$可求得$a=6$，$b=5$.

如果$a-b$＝4，结合$a+b=11$可知没有正整数解.

因此，$a=6$，$b=5$，A＝65. ……………………**20 分**

二、（本题满分 25 分）如图，$\triangle ABC$中，D为BC的中点，DE平分$\angle ADB$，DF平分$\angle ADC$，$BE\perp DE$，$CF\perp DF$，P为AD与EF的交点.证明：$EF=2PD$.



证明 设$\angle ADB=2\alpha$，则$\angle ADC=180^\circ-2\alpha$，$\angle ADE=\angle BDE=\alpha$，$\angle ADF=\angle CDF=90^\circ-\alpha$. ……………………**5 分**

由于$\triangle BDE$是直角三角形，所以$\angle EBD=90^\circ-\angle BDE=90^\circ-\alpha$，所以$\angle EBD=\angle FDC$. ……………………**10 分**

又因为D为BC的中点，所以$BD=DC$，所以Rt$\triangle BDE\cong$Rt$\triangle DCF$，所以$BE=CF$. ……………………**15 分**

又由$\angle EBD=\angle FDC$可知$EB/\!/FD$，因此，四边形BDFE是平行四边形，故$EF/\!/BD$，于是可得$\angle PED=\angle BDE$，$\angle PFD=\angle CDF$. ……………………**20 分**

又因为$\angle BDE=\angle PDE$，$\angle CDF=\angle PDF$，所以$\angle PED=\angle PDE$，$\angle PFD=\angle PDF$，所以$PE=PD=PF$，所以$EF=2PD$. ……………………**25 分**

三、（本题满分 25 分）已知a,b,c是不全相等的正整数，且$\dfrac{\sqrt{5}a+b}{\sqrt{5}b+c}$为有理数，求$\dfrac{a^2+b^2+c^2}{a+b+c}$的最小值.

解 因为b,c是正整数，$\sqrt{5}$是无理数，故$\sqrt{5}b-c\neq 0$.

而$\dfrac{\sqrt{5}a+b}{\sqrt{5}b+c}=\dfrac{(\sqrt{5}a+b)(\sqrt{5}b-c)}{5b^2-c^2}=\dfrac{(5ab-bc)+\sqrt{5}(b^2-ac)}{5b^2-c^2}$为有理数，所以$b^2-ac=0$，故$b^2=ac$，又$a,b,c$不全相等，不妨设$a>b>c$. ……………………**10 分**

又$a^2+b^2+c^2=a^2+2ac+c^2-b^2=(a+c)^2-b^2=(a+c+b)(a+c-b)$，所以$\dfrac{a^2+b^2+c^2}{a+b+c}=a+c-b$，为整数. ……………………**15 分**

当$c=1$时，$a=b^2$为完全平方数，则$a\geq 4$，$a+c-b=a+c-\sqrt{ac}=(\sqrt{c}-\dfrac{\sqrt{a}}{2})^2+\dfrac{3a}{4}\geq 0+3=3$；……………………**20 分**

当$c\geq 2$时，$a+c-b\geq 1+c\geq 3$.

所以$a+c-b\geq 3$，且当$a=4$，$b=2$，$c=1$时，$a+c-b=3$.

因此，$\dfrac{a^2+b^2+c^2}{a+b+c}$的最小值为 3. ……………………**25 分**