

2018 年初中数学联赛（初二年级）试题参考答案及评分标准

说明：评阅试卷时，请依据本评分标准.第一试，选择题和填空题只设 7 分和 0 分两档；第二试各题，请按照本评分标准规定的评分档次给分.如果考生的解答方法和本解答不同，只要思路合理，步骤正确，在评卷时请参照本评分标准划分的档次，给予相应的分数.

第一试

一、选择题：（本题满分 42 分，每小题 7 分）

1. 已知 $a = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ ，则 $a^6 - 8a^2 =$ ()

- A. -3. B. $-\sqrt{5}$. C. $\sqrt{5}$. D. 3.

【答】A.

因为 $a^2 = \frac{3+\sqrt{5}}{2} = a+1$ ，所以 $a^3 = a(a+1) = a^2 + a = 2a+1$ ，所以

$$a^6 - 8a^2 = (2a+1)^2 - 8(a+1) = 4a^2 - 4a - 7 = 4(a+1) - 4a - 7 = -3.$$

2. 满足 $(x^2 + x - 1)^{x+2} = 1$ 的整数 x 的个数为 ()

- A. 1. B. 2. C. 3. D. 4.

【答】C.

当 $x+2=0$ 且 $x^2 + x - 1 \neq 0$ 时， $x = -2$.

当 $x^2 + x - 1 = 1$ 时， $x = -2$ 或 $x = 1$.

当 $x^2 + x - 1 = -1$ 且 $x+2$ 为偶数时， $x = 0$.

所以，满足条件的整数 x 有 3 个.

3. 设 $1 \leq n \leq 100$ ，且 $8n+1$ 为完全平方数，则符合条件的整数 n 的个数为 ()

- A. 12. B. 13. C. 14. D. 15.

【答】B.

易知 $8n+1$ 只能为奇数的平方，设 $8n+1 = (2l+1)^2$ ，其中 l 为非负整数，则 $n = \frac{l(l+1)}{2}$ ，所以

$$1 \leq \frac{l(l+1)}{2} \leq 100, \text{ 故 } 1 \leq l \leq 13. \text{ 所以，满足条件的整数 } n \text{ 有 13 个.}$$

4. 已知点 E ， F 分别在正方形 $ABCD$ 的边 CD ， AD 上， $CD = 4CE = 4$ ， $\angle EFB = \angle FBC$ ，则 $EF =$ ()

- A. $2\sqrt{3}$. B. $\sqrt{10}$. C. $\frac{13}{4}$. D. $\frac{17}{5}$.

【答】D.

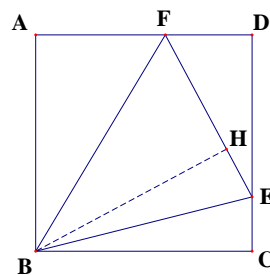
由题意可得 $CE = 1, DE = 3$. 设 $DF = x$, 则 $AF = 4 - x$, $EF = \sqrt{x^2 + 9}$.

作 $BH \perp EF$ 于点 H . 因为 $\angle EFB = \angle FBC = \angle AFB$, $\angle BAF = 90^\circ = \angle BHF$, BF 公共, 所以 $\triangle BAF \cong \triangle BHF$, 所以 $BH = BA = 4$.

由 $S_{\text{四边形}ABCD} = S_{\triangle ABF} + S_{\triangle BEF} + S_{\triangle DEF} + S_{\triangle BCE}$ 得

$$4^2 = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot (4 - x) + \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot \sqrt{x^2 + 9} + \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot x + \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 1,$$

$$\text{解得 } x = \frac{8}{5}. \text{ 所以 } EF = \sqrt{x^2 + 9} = \frac{17}{5}.$$



5. 已知非零实数 x, y, z 满足 $\frac{x^2}{1+4x^2} = \frac{y}{4}, \frac{y^2}{1+10y^2} = \frac{z}{10}, \frac{z^2}{1+16z^2} = \frac{x}{2}$, 则 $x + y + z =$ ()

- A. $\frac{13}{12}$. B. $\frac{19}{12}$. C. $\frac{17}{10}$. D. $\frac{19}{10}$.

【答】C.

由条件得 $\frac{1}{x^2} + 4 = \frac{4}{y}, \frac{1}{y^2} + 10 = \frac{10}{z}, \frac{1}{z^2} + 16 = \frac{2}{x}$, 三式相加, 得

$$\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} + \frac{1}{z^2} + 30 = \frac{2}{x} + \frac{4}{y} + \frac{10}{z}, \text{ 即 } \left(\frac{1}{x} - 1\right)^2 + \left(\frac{1}{y} - 2\right)^2 + \left(\frac{1}{z} - 5\right)^2 = 0,$$

所以 $x = 1, y = \frac{1}{2}, z = \frac{1}{5}$, 故 $x + y + z = \frac{17}{10}$.

6. 设 $M = \frac{1}{2018} + \frac{1}{2019} + \frac{1}{2020} + \cdots + \frac{1}{2050}$, 则 $\frac{1}{M}$ 的整数部分是 ()

- A. 60. B. 61. C. 62. D. 63.

【答】B.

因为 $M < \frac{1}{2018} \times 33$, 所以 $\frac{1}{M} > \frac{2018}{33} = 61\frac{5}{33}$.

$$\begin{aligned} \text{又 } M &= \left(\frac{1}{2018} + \frac{1}{2019} + \cdots + \frac{1}{2030}\right) + \left(\frac{1}{2031} + \frac{1}{2032} + \cdots + \frac{1}{2050}\right) \\ &> \frac{1}{2030} \times 13 + \frac{1}{2050} \times 20 = \frac{1345}{83230}, \end{aligned}$$

所以 $\frac{1}{M} < \frac{83230}{1345} = 61\frac{1185}{1345}$, 故 $\frac{1}{M}$ 的整数部分为 61.

二、填空题: (本题满分 28 分, 每小题 7 分)

1. 若素数 p, q 满足 $7pq^2 + p = q^3 + 43p^3 + 1$, 则 $p + q =$ _____.

【答】9.

显然 p, q 不能均为奇数 (否则等式左边为偶数, 右边为奇数), 于是 $p = 2$ 或 $q = 2$.

(1) 若 $p = 2$, 则可得 $q^3 - 14q^2 + 343 = 0$, 解得 $q = 7$. 检验知 $(p, q) = (2, 7)$ 为一组解.

(2) 若 $q = 2$, 则可得 $29p = 43p^3 + 9$, 此式一边为奇数一边为偶数, 没有整数解.

综上可知 $p = 2, q = 7$, 所以 $p + q = 9$.

2. 已知实数 a, b, c 满足 $\frac{a+b}{c} = \frac{b+c}{a} = \frac{c+a}{b}$, 则 $\frac{(a+b)(b+c)(c+a)}{abc} = \underline{\hspace{2cm}}$.

【答】 -1 或 8.

设 $\frac{a+b}{c} = \frac{b+c}{a} = \frac{c+a}{b} = k$, 则 $\frac{(a+b)(b+c)(c+a)}{abc} = k^3$.

当 $a+b+c=0$ 时, $k = -1$.

当 $a+b+c \neq 0$ 时, $k = \frac{(a+b)+(b+c)+(c+a)}{c+a+b} = 2$.

所以 $\frac{(a+b)(b+c)(c+a)}{abc} = -1$ 或 8 .

3. 如图, 在平行四边形 $ABCD$ 中, $BC = 2AB$, $CE \perp AB$ 于 E , F 为 AD 的中点, 若 $\angle AEF = 48^\circ$, 则 $\angle B = \underline{\hspace{2cm}}$.

【答】 84° .

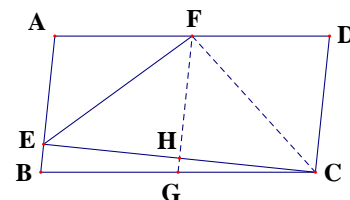
设 BC 的中点为 G , 连结 FG 交 CE 于 H , 由题设条件知 $FGCD$ 为菱形.

由 $AB \parallel FG \parallel DC$ 及 F 为 AD 的中点, 知 H 为 CE 的中点.

又 $CE \perp AB$, 所以 $CE \perp FG$, 所以 FH 垂直平分 CE , 故

$\angle DFC = \angle GFC = \angle EFG = \angle AEF = 48^\circ$.

所以 $\angle B = \angle FGC = 180^\circ - 2 \times 48^\circ = 84^\circ$.



4. 已知两个正整数的和比它们的积小 1000, 若其中较大的数是完全平方数, 则较小的数为 $\underline{\hspace{2cm}}$.

【答】 8.

设这两个数为 m^2, n ($m^2 > n$), 则 $m^2 + n = m^2n - 1000$, 即 $(m^2 - 1)(n - 1) = 1001$.

又 $1001 = 1001 \times 1 = 143 \times 7 = 91 \times 11 = 77 \times 13$, 所以 $(m^2 - 1, n - 1) = (1001, 1)$ 或 $(143, 7)$ 或 $(91, 11)$

或 $(77, 13)$, 验证可知只有 $(m^2 - 1, n - 1) = (143, 7)$ 满足条件, 此时 $m^2 = 144, n = 8$.

第二试

一、(本题满分 20 分) 已知 E 为四边形 $ABCD$ 的边 AB 上的一点, $\angle A = 90^\circ$, $\angle B = 45^\circ$, $AB = 4$, $CD = 2\sqrt{2}$, $DE = CE = 2$, 求 AD .

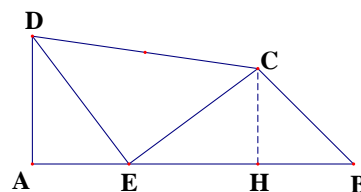
解 因为 $DE = 2$, $\angle DAE = 90^\circ$, 所以

$$AE^2 + AD^2 = DE^2 = 4. \quad \textcircled{1} \quad \dots\dots\dots 5 \text{分}$$

由 $DE = CE = 2$, $CD = 2\sqrt{2}$ 可得 $\angle DEC = 90^\circ$, 所以

$$\angle CEB = 90^\circ - \angle DEA = \angle ADE.$$

作 $CH \perp AB$ 于点 H , 则 $\triangle ADE \cong \triangle HEC$, 所以 $EH = AD$, $CH = AE$. $\dots\dots\dots 10$ 分



在 $\text{Rt}\triangle CHB$ 中, $\angle B = 45^\circ$, 则 $HB = CH = AE$, 故
 $AB = AE + EH + HB = 2AE + AD = 4$. ②15分
 联立①, ②, 解得 $AE = \frac{6}{5}$, $AD = \frac{8}{5}$20分

二、(本题满分 25 分) 若实数 x, y, z 满足 $x + y + z = 6$, $xyz + 1 = 2(xy + yz + zx)$, $(x-3)^3 + (y-3)^3 + (z-3)^3 = 3$, 求 xyz .

解 令 $a = x - 3$, $b = y - 3$, $c = z - 3$, $xyz = m$, 则 $a + b + c = -3$, $a^3 + b^3 + c^3 = 3$,
 $ab + bc + ca = (xy + yz + zx) - 6(x + y + z) + 27 = \frac{1}{2}(m + 1) - 9$,
 $abc = (x - 3)(y - 3)(z - 3) = xyz - 3(xy + yz + zx) + 9(x + y + z) - 27 = \frac{1}{2}(51 - m)$,10分
 又因为 $a^3 + b^3 + c^3 = (a + b + c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca) + 3abc$
 $= (a + b + c)[(a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ca) - 3(ab + bc + ca)] + 3abc$
 $= (a + b + c)^3 - 3(a + b + c)(ab + bc + ca) + 3abc$,
 所以 $(-3)^3 - 3 \cdot (-3) \left[\frac{1}{2}(m + 1) - 9 \right] + 3 \cdot \frac{1}{2}(51 - m) = 3$,20分
 解得 $m = 10$, 即 $xyz = 10$25分

三、(本题满分 25 分) 设 a, b, c 都是大于 1 的正整数, 且 $(ab - 1)(bc - 1)(ca - 1)$ 能被 abc 整除, 求所有满足条件的数组 (a, b, c) .

解 因为 $(ab - 1)(bc - 1)(ca - 1) = (abc)^2 - abc(a + b + c) + ab + bc + ca - 1$, 且 abc 整除
 $(ab - 1)(bc - 1)(ca - 1)$, 所以, 存在正整数 k 使得 $ab + bc + ca - 1 = kabc$, 则 $k = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} - \frac{1}{abc}$5分
 当 $a \leq b \leq c$ 时, $k < \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} < \frac{3}{a} \leq \frac{3}{2}$, 所以 $k = 1$10分
 此时 $abc = ab + bc + ca - 1 < 3bc$, 所以 $a < 3$, 故 $a = 2$. 于是 $2bc = bc + 2b + 2c - 1$, 故
 $(b - 2)(c - 2) = 3$, 所以 $b - 2 = 1, c - 2 = 3$, 即 $b = 3, c = 5$. 故 $(a, b, c) = (2, 3, 5)$20分
 再由 a, b, c 的对称性知, 所有可能的数组 (a, b, c) 共有 6 组, 即 $(2, 3, 5)$, $(2, 5, 3)$, $(3, 2, 5)$, $(3, 5, 2)$,
 $(5, 2, 3)$, $(5, 3, 2)$25分