

2018 年初中数学联赛试题参考答案及评分标准

说明：评阅试卷时，请依据本评分标准.第一试，选择题和填空题只设 7 分和 0 分两档；第二试各题，请按照本评分标准规定的评分档次给分.如果考生的解答方法和本解答不同，只要思路合理，步骤正确，在评卷时请参照本评分标准划分的档次，给予相应的分数.

第一试(A)

一、选择题：(本题满分 42 分，每小题 7 分)

1. 设二次函数 $y = x^2 + 2ax + \frac{a^2}{2}$ 的图象的顶点为 A ，与 x 轴的交点为 B, C . 当 $\triangle ABC$ 为等边三角形时，其边长为

()

A. $\sqrt{6}$. B. $2\sqrt{2}$. C. $2\sqrt{3}$. D. $3\sqrt{2}$.

【答】C.

由题设知 $A(-a, -\frac{a^2}{2})$. 设 $B(x_1, 0)$, $C(x_2, 0)$, 二次函数的图象的对称轴与 x 轴的交点为 D , 则

$$BC = |x_1 - x_2| = \sqrt{(x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2} = \sqrt{4a^2 - 4 \times \frac{a^2}{2}} = \sqrt{2a^2}.$$

又 $AD = \frac{\sqrt{3}}{2} BC$, 则 $|\frac{a^2}{2}| = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \sqrt{2a^2}$, 解得 $a^2 = 6$ 或 $a^2 = 0$ (舍去).

所以, $\triangle ABC$ 的边长 $BC = \sqrt{2a^2} = 2\sqrt{3}$.

2. 如图, 在矩形 $ABCD$ 中, $\angle BAD$ 的平分线交 BD 于点 E , $AB = 1$, $\angle CAE = 15^\circ$, 则 $BE =$ ()

A. $\frac{\sqrt{3}}{3}$. B. $\frac{\sqrt{2}}{2}$. C. $\sqrt{2} - 1$. D. $\sqrt{3} - 1$.

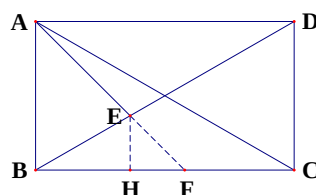
【答】D.

延长 AE 交 BC 于点 F , 过点 E 作 BC 的垂线, 垂足为 H .

由已知得 $\angle BAF = \angle FAD = \angle AFB = \angle HEF = 45^\circ$, $BF = AB = 1$, $\angle EBH = \angle ACB = 30^\circ$.

设 $BE = x$, 则 $HF = HE = \frac{x}{2}$, $BH = \frac{\sqrt{3}x}{2}$.

因为 $BF = BH + HF$, 所以 $1 = \frac{\sqrt{3}x}{2} + \frac{x}{2}$, 解得 $x = \sqrt{3} - 1$. 所以 $BE = \sqrt{3} - 1$.



3. 设 p, q 均为大于 3 的素数, 则使 $p^2 + 5pq + 4q^2$ 为完全平方数的素数对 (p, q) 的个数为 ()

A. 1. B. 2. C. 3. D. 4.

【答】B.

设 $p^2 + 5pq + 4q^2 = m^2$ (m 为自然数), 则 $(p+2q)^2 + pq = m^2$, 即

$$(m-p-2q)(m+p+2q) = pq.$$

由于 p, q 为素数, 且 $m+p+2q > p, m+p+2q > q$, 所以 $m-p-2q=1, m+p+2q=pq$, 从而 $pq-2p-4q-1=0$, 即 $(p-4)(q-2)=9$, 所以 $(p, q)=(5, 11)$ 或 $(7, 5)$.

所以, 满足条件的素数对 (p, q) 的个数为 2.

4. 若实数 a, b 满足 $a-b=2$, $\frac{(1-a)^2}{b} - \frac{(1+b)^2}{a} = 4$, 则 $a^5 - b^5 =$ ()

- A. 46. B. 64. C. 82. D. 128.

【答】C.

由条件 $\frac{(1-a)^2}{b} - \frac{(1+b)^2}{a} = 4$ 得 $a-b-2a^2-2b^2-4ab+a^3-b^3=0$,

即 $(a-b)-2[(a-b)^2+4ab]+(a-b)[(a-b)^2+3ab]=0$,

又 $a-b=2$, 所以 $2-2[4+4ab]+2[4+3ab]=0$, 解得 $ab=1$. 所以 $a^2+b^2=(a-b)^2+2ab=6$,

$$a^3-b^3=(a-b)[(a-b)^2+3ab]=14, \quad a^5-b^5=(a^2+b^2)(a^3-b^3)-a^2b^2(a-b)=82.$$

5. 对任意的整数 x, y , 定义 $x@y=x+y-xy$, 则使得 $(x@y)@z+(y@z)@x+(z@x)@y=0$ 的整数组 (x, y, z) 的个数为 ()

- A. 1. B. 2. C. 3. D. 4.

【答】D.

$$(x@y)@z=(x+y-xy)@z=(x+y-xy)+z-(x+y-xy)z=x+y+z-xy-yz-zx+xyz,$$

由对称性, 同样可得

$$(y@z)@x=x+y+z-xy-yz-zx+xyz, \quad (z@x)@y=x+y+z-xy-yz-zx+xyz.$$

所以, 由已知可得 $x+y+z-xy-yz-zx+xyz=0$, 即 $(x-1)(y-1)(z-1)=-1$.

所以, x, y, z 为整数时, 只能有以下几种情况:

$$\begin{cases} x-1=1, \\ y-1=1, \\ z-1=-1, \end{cases} \text{ 或 } \begin{cases} x-1=1, \\ y-1=-1, \\ z-1=1, \end{cases} \text{ 或 } \begin{cases} x-1=-1, \\ y-1=1, \\ z-1=1, \end{cases} \text{ 或 } \begin{cases} x-1=-1, \\ y-1=-1, \\ z-1=-1, \end{cases}$$

所以, $(x, y, z)=(2, 2, 0)$ 或 $(2, 0, 2)$ 或 $(0, 2, 2)$ 或 $(0, 0, 0)$, 故共有 4 个符合要求的整数组.

6. 设 $M = \frac{1}{2018} + \frac{1}{2019} + \frac{1}{2020} + \cdots + \frac{1}{2050}$, 则 $\frac{1}{M}$ 的整数部分是 ()
- A. 60. B. 61. C. 62. D. 63.

【答】B.

因为 $M < \frac{1}{2018} \times 33$, 所以 $\frac{1}{M} > \frac{2018}{33} = 61\frac{5}{33}$.

又 $M = (\frac{1}{2018} + \frac{1}{2019} + \cdots + \frac{1}{2030}) + (\frac{1}{2031} + \frac{1}{2032} + \cdots + \frac{1}{2050})$
 $> \frac{1}{2030} \times 13 + \frac{1}{2050} \times 20 = \frac{1345}{83230}$,

所以 $\frac{1}{M} < \frac{83230}{1345} = 61\frac{1185}{1345}$, 故 $\frac{1}{M}$ 的整数部分为 61.

二、填空题: (本题满分 28 分, 每小题 7 分)

1. 如图, 在平行四边形 $ABCD$ 中, $BC = 2AB$, $CE \perp AB$ 于 E , F 为 AD 的中点, 若 $\angle AEF = 48^\circ$, 则 $\angle B =$ _____.

【答】 84° .

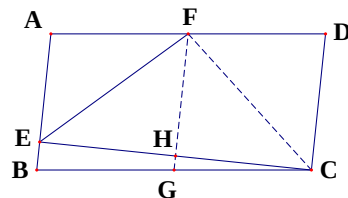
设 BC 的中点为 G , 连结 FG 交 CE 于 H , 由题设条件知 $FGCD$ 为菱形.

由 $AB \parallel FG \parallel DC$ 及 F 为 AD 的中点, 知 H 为 CE 的中点.

又 $CE \perp AB$, 所以 $CE \perp FG$, 所以 FH 垂直平分 CE , 故

$\angle DFC = \angle GFC = \angle EFG = \angle AEF = 48^\circ$.

所以 $\angle B = \angle FGC = 180^\circ - 2 \times 48^\circ = 84^\circ$.



2. 若实数 x, y 满足 $x^3 + y^3 + \frac{1}{4}(x+y) = \frac{15}{2}$, 则 $x+y$ 的最大值为 _____.

【答】3.

由 $x^3 + y^3 + \frac{1}{4}(x+y) = \frac{15}{2}$ 可得 $(x+y)(x^2 - xy + y^2) + \frac{1}{4}(x+y) = \frac{15}{2}$, 即

$$(x+y)(x^2 - xy + y^2 + \frac{1}{4}) = \frac{15}{2}. \quad ①$$

令 $x+y=k$, 注意到 $x^2 - xy + y^2 + \frac{1}{4} = (x - \frac{y}{2})^2 + \frac{3}{4}y^2 + \frac{1}{4} > 0$, 故 $x+y=k > 0$.

又因为 $x^2 - xy + y^2 + \frac{1}{4} = (x+y)^2 - 3xy + \frac{1}{4}$, 故由①式可得 $k^3 - 3xyk + \frac{1}{4}k = \frac{15}{2}$, 所以

$$xy = \frac{k^3 + \frac{1}{4}k - \frac{15}{2}}{3k}.$$

于是, x, y 可看作关于 t 的一元二次方程 $t^2 - kt + \frac{k^3 + \frac{1}{4}k - \frac{15}{2}}{3k} = 0$ 的两根, 所以

$$\Delta = (-k)^2 - 4 \cdot \frac{k^3 + \frac{1}{4}k - \frac{15}{2}}{3k} \geq 0,$$

化简得 $k^3 + k - 30 \leq 0$, 即 $(k-3)(k^2 + 3k + 10) \leq 0$, 所以 $0 < k \leq 3$.

故 $x+y$ 的最大值为 3.

3. 没有重复数字且不为 5 的倍数的五位数的个数为_____.

【答】21504.

显然首位数字不能为 0, 末位不能为 0 和 5.

当首位数字不为 5 时, 则首位只能选 0,5 之外的 8 个数.相应地个位数只能选除 0,5 及万位数之外的 7 个数, 千位上只能选万位和个位之外的 8 个数, 百位上只能选剩下的 7 个数, 十位上只能选剩下的 6 个数. 所以, 此时满足条件的五位数的个数为 $8 \times 7 \times 8 \times 7 \times 6 = 18816$ 个.

当首位数字为 5 时, 则个位有 8 个数可选, 依次千位有 8 个数可选, 百位有 7 个数可选, 十位有 6 个数可选. 所以, 此时满足条件的五位数的个数为 $8 \times 8 \times 7 \times 6 = 2688$ 个.

所以, 满足条件的五位数的个数为 $18816 + 2688 = 21504$ (个).

4. 已知实数 a, b, c 满足 $a + b + c = 0$, $a^2 + b^2 + c^2 = 1$, 则 $\frac{a^5 + b^5 + c^5}{abc} =$ _____.

【答】 $\frac{5}{2}$.

由已知条件可得 $ab + bc + ca = \frac{1}{2}[(a + b + c)^2 - (a^2 + b^2 + c^2)] = -\frac{1}{2}$, $a^3 + b^3 + c^3 = 3abc$, 所以

$$a^5 + b^5 + c^5 = (a^2 + b^2 + c^2)(a^3 + b^3 + c^3) - [a^2(b^3 + c^3) + b^2(a^3 + c^3) + c^2(a^3 + b^3)]$$

$$= 3abc - [a^2b^2(a + b) + a^2c^2(a + c) + b^2c^2(b + c)] = 3abc + (a^2b^2c + a^2c^2b + b^2c^2a)$$

$$= 3abc + abc(ab + bc + ca) = 3abc - \frac{1}{2}abc = \frac{5}{2}abc.$$

$$\text{所以 } \frac{a^5 + b^5 + c^5}{abc} = \frac{5}{2}.$$

第一试(B)

一、选择题: (本题满分 42 分, 每小题 7 分)

1. 满足 $(x^2 + x - 1)^{x+2} = 1$ 的整数 x 的个数为 ()

A. 1. B. 2. C. 3. D. 4.

【答】C.

当 $x + 2 = 0$ 且 $x^2 + x - 1 \neq 0$ 时, $x = -2$.

当 $x^2 + x - 1 = 1$ 时, $x = -2$ 或 $x = 1$.

当 $x^2 + x - 1 = -1$ 且 $x + 2$ 为偶数时, $x = 0$.

所以, 满足条件的整数 x 有 3 个.

2. 已知 $x_1, x_2, x_3 (x_1 < x_2 < x_3)$ 为关于 x 的方程 $x^3 - 3x^2 + (a + 2)x - a = 0$ 的三个实数根, 则 $4x_1 - x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 =$ ()

A. 5. B. 6. C. 7. D. 8.

【答】A.

方程即 $(x-1)(x^2-2x+a)=0$ ，它的一个实数根为 1，另外两个实数根之和为 2，其中必有一根小于 1，另一根大于 1，于是 $x_2=1, x_1+x_3=2$ ，故

$$4x_1-x_1^2+x_2^2+x_3^2=(x_3+x_1)(x_3-x_1)+4x_1+1=2(x_3-x_1)+4x_1+1=2(x_3+x_1)+1=5.$$

3. 已知点 E, F 分别在正方形 $ABCD$ 的边 CD, AD 上， $CD=4CE$ ， $\angle EFB=\angle FBC$ ，则 $\tan \angle ABF =$ ()

- A. $\frac{1}{2}$. B. $\frac{3}{5}$. C. $\frac{\sqrt{2}}{2}$. D. $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

【答】B.

不妨设 $CD=4$ ，则 $CE=1, DE=3$. 设 $DF=x$ ，则 $AF=4-x$ ， $EF=\sqrt{x^2+9}$.

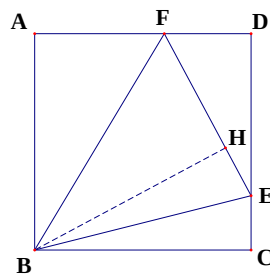
作 $BH \perp EF$ 于点 H . 因为 $\angle EFB=\angle FBC=\angle AFB$ ， $\angle BAF=90^\circ=\angle BHF$ ， BF 公共，所以 $\triangle BAF \cong \triangle BHF$ ，所以 $BH=BA=4$.

由 $S_{\text{四边形}ABCD} = S_{\triangle ABF} + S_{\triangle BEF} + S_{\triangle DEF} + S_{\triangle BCE}$ 得

$$4^2 = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot (4-x) + \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot \sqrt{x^2+9} + \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot x + \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 1,$$

$$\text{解得 } x = \frac{8}{5}.$$

$$\text{所以 } AF = 4-x = \frac{12}{5}, \quad \tan \angle ABF = \frac{AF}{AB} = \frac{3}{5}.$$



4. 方程 $\sqrt{3+\sqrt{9+x}} = \sqrt[3]{x}$ 的实数根的个数为 ()

- A. 0. B. 1. C. 2. D. 3.

【答】B.

令 $y = \sqrt{9+x}$ ，则 $y \geq 0$ ，且 $x = y^2 - 9$ ，原方程变为 $\sqrt{3+y} = \sqrt[3]{y^2-9}$ ，解得 $y=1$ 或 $y=6$ ，从而可得 $x=-8$ 或 $x=27$.

检验可知： $x=-8$ 是增根，舍去； $x=27$ 是原方程的实数根.

所以，原方程只有 1 个实数根.

5. 设 a, b, c 为三个实数，它们中任何一个数加上其余两数之积的 2017 倍都等于 2018，则这样的三元数组 (a, b, c) 的个数为 ()

- A. 4. B. 5. C. 6. D. 7.

【答】B.

由已知得， $a + 2017bc = 2018$ ， $b + 2017ac = 2018$ ， $c + 2017ab = 2018$ ，两两作差，可得

$$(a-b)(1-2017c) = 0, \quad (b-c)(1-2017a) = 0, \quad (c-a)(1-2017b) = 0.$$

由 $(a-b)(1-2017c)=0$ ，可得 $a=b$ 或 $c=\frac{1}{2017}$ 。

(1) 当 $a=b=c$ 时，有 $2017a^2+a-2018=0$ ，解得 $a=1$ 或 $a=-\frac{2018}{2017}$ 。

(2) 当 $a=b \neq c$ 时，解得 $a=b=\frac{1}{2017}$ ， $c=2018-\frac{1}{2017}$ 。

(3) 当 $a \neq b$ 时， $c=\frac{1}{2017}$ ，此时有： $a=\frac{1}{2017}$ ， $b=2018-\frac{1}{2017}$ ，或 $a=2018-\frac{1}{2017}$ ， $b=\frac{1}{2017}$ 。

故这样的三元数组 (a,b,c) 共有 5 个。

6. 已知实数 a, b 满足 $a^3-3a^2+5a=1$ ， $b^3-3b^2+5b=5$ ，则 $a+b=$ ()

A. 2. B. 3. C. 4. D. 5.

【答】A.

有已知条件可得 $(a-1)^3+2(a-1)=-2$ ， $(b-1)^3+2(b-1)=2$ ，两式相加得

$$(a-1)^3+2(a-1)+(b-1)^3+2(b-1)=0,$$

因式分解得 $(a+b-2)[(a-1)^2-(a-1)(b-1)+(b-1)^2+2]=0$ 。

因为

$$(a-1)^2-(a-1)(b-1)+(b-1)^2+2=[(a-1)-\frac{1}{2}(b-1)]^2+\frac{3}{4}(b-1)^2+2>0,$$

所以 $a+b-2=0$ ，因此 $a+b=2$ 。

二、填空题：(本题满分 28 分，每小题 7 分)

1. 已知 p, q, r 为素数，且 pqr 整除 $pq+qr+rp-1$ ，则 $p+q+r=$ _____。

【答】10.

设 $k=\frac{pq+qr+rp-1}{pqr}=\frac{1}{p}+\frac{1}{q}+\frac{1}{r}-\frac{1}{pqr}$ ，由题意知 k 是正整数，又 $p, q, r \geq 2$ ，所以 $k < \frac{3}{2}$ ，从

而 $k=1$ ，即有 $pq+qr+rp-1=pqr$ ，于是可知 p, q, r 互不相等。

当 $2 \leq p < q < r$ 时， $pqr=pq+qr+rp-1 < 3qr$ ，所以 $q < 3$ ，故 $q=2$ 。于是 $2qr=qr+2q+2r-1$ ，故 $(q-2)(r-2)=3$ ，所以 $q-2=1, r-2=3$ ，即 $q=3, r=5$ ，所以， $(p, q, r)=(2, 3, 5)$ 。

再由 p, q, r 的对称性知，所有可能的数组 (p, q, r) 共有 6 组，即 $(2, 3, 5)$ ， $(2, 5, 3)$ ， $(3, 2, 5)$ ， $(3, 5, 2)$ ， $(5, 2, 3)$ ， $(5, 3, 2)$ 。

于是 $p+q+r=10$ 。

2. 已知两个正整数的和比它们的积小 1000, 若其中较大的数是完全平方数, 则较小的数为_____.

【答】8.

设这两个数为 $m^2, n (m^2 > n)$, 则 $m^2 + n = m^2 n - 1000$, 即 $(m^2 - 1)(n - 1) = 1001$.

又 $1001 = 1001 \times 1 = 143 \times 7 = 91 \times 11 = 77 \times 13$, 所以 $(m^2 - 1, n - 1) = (1001, 1)$ 或 $(143, 7)$ 或 $(91, 11)$

或 $(77, 13)$, 验证可知只有 $(m^2 - 1, n - 1) = (143, 7)$ 满足条件, 此时 $m^2 = 144, n = 8$.

3. 已知 D 是 $\triangle ABC$ 内一点, E 是 AC 的中点, $AB = 6, BC = 10, \angle BAD = \angle BCD, \angle EDC = \angle ABD$, 则 $DE =$ _____.

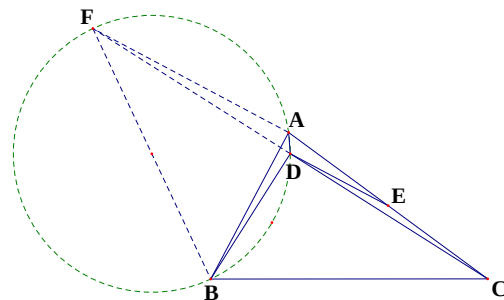
【答】4.

延长 CD 至 F , 使 $DF = DC$, 则 $DE \parallel AF$ 且 $DE = \frac{1}{2} AF$,

所以 $\angle AFD = \angle EDC = \angle ABD$, 故 A, F, B, D 四点共圆, 于是

$\angle BFD = \angle BAD = \angle BCD$, 所以 $BF = BC = 10$, 且 $BD \perp FC$, 故 $\angle FAB = \angle FDB = 90^\circ$.

又 $AB = 6$, 故 $AF = \sqrt{10^2 - 6^2} = 8$, 所以 $DE = \frac{1}{2} AF = 4$.



4. 已知二次函数 $y = x^2 + 2(m + 2n + 1)x + (m^2 + 4n^2 + 50)$ 的图象在 x 轴的上方, 则满足条件的正整数对 (m, n) 的个数为_____.

【答】15.

因为二次函数的图象在 x 轴的上方, 所以 $\Delta = [2(m + 2n + 1)]^2 - 4(m^2 + 4n^2 + 50) < 0$, 整理得 $4mn + 2m + 4n < 49$, 即 $(m + 1)(2n + 1) < \frac{51}{2}$. 因为 m, n 为正整数, 所以 $(m + 1)(2n + 1) \leq 25$.

又 $m + 1 \geq 2$, 所以 $2n + 1 < \frac{25}{2}$, 故 $n \leq 5$.

当 $n = 1$ 时, $m + 1 \leq \frac{25}{3}$, 故 $m \leq \frac{22}{3}$, 符合条件的正整数对 (m, n) 有 7 个;

当 $n = 2$ 时, $m + 1 \leq 5$, 故 $m \leq 4$, 符合条件的正整数对 (m, n) 有 4 个;

当 $n = 3$ 时, $m + 1 \leq \frac{25}{7}$, 故 $m \leq \frac{18}{7}$, 符合条件的正整数对 (m, n) 有 2 个;

当 $n = 4$ 时, $m + 1 \leq \frac{25}{9}$, 故 $m \leq \frac{17}{9}$, 符合条件的正整数对 (m, n) 有 1 个;

当 $n = 5$ 时, $m + 1 \leq \frac{25}{11}$, 故 $m \leq \frac{14}{11}$, 符合条件的正整数对 (m, n) 有 1 个.

综合可知: 符合条件的正整数对 (m, n) 有 $7 + 4 + 2 + 1 + 1 = 15$ 个.

第二试 (A)

一、(本题满分 20 分) 设 a, b, c, d 为四个不同的实数, 若 a, b 为方程 $x^2 - 10cx - 11d = 0$ 的根, c, d 为方程 $x^2 - 10ax - 11b = 0$ 的根, 求 $a + b + c + d$ 的值.

解 由韦达定理得 $a + b = 10c$, $c + d = 10a$, 两式相加得 $a + b + c + d = 10(a + c)$.

.....5 分

因为 a 是方程 $x^2 - 10cx - 11d = 0$ 的根, 所以 $a^2 - 10ac - 11d = 0$, 又 $d = 10a - c$, 所以

$$a^2 - 110a + 11c - 10ac = 0. \quad \text{①} \quad \text{.....10 分}$$

$$\text{类似可得 } c^2 - 110c + 11a - 10ac = 0. \quad \text{②} \quad \text{.....15 分}$$

$$\text{①} - \text{②} \text{ 得 } (a - c)(a + c - 121) = 0.$$

因为 $a \neq c$, 所以 $a + c = 121$, 所以 $a + b + c + d = 10(a + c) = 1210$20 分

二、(本题满分 25 分) 如图, 在扇形 OAB 中, $\angle AOB = 90^\circ$, $OA = 12$, 点 C 在 OA 上, $AC = 4$, 点 D 为 OB 的中点, 点 E 为弧 AB 上的动点, OE 与 CD 的交点为 F .

(1) 当四边形 $ODEC$ 的面积 S 最大时, 求 EF ;

(2) 求 $CE + 2DE$ 的最小值.

解 (1) 分别过 O, E 作 CD 的垂线, 垂足为 M, N .

由 $OD = 6, OC = 8$, 得 $CD = 10$. 所以

$$S = S_{\triangle OCD} + S_{\triangle ECD} = \frac{1}{2} CD \cdot (OM + EN)$$

$$\leq \frac{1}{2} CD \cdot OE = \frac{1}{2} \times 10 \times 12 = 60,$$

当 $OE \perp DC$ 时, S 取得最大值 60.

$$\text{此时, } EF = OE - OF = 12 - \frac{6 \times 8}{10} = \frac{36}{5}.$$

.....5 分

.....10 分

(2) 延长 OB 至点 G , 使 $BG = OB = 12$, 连结 GC, GE .

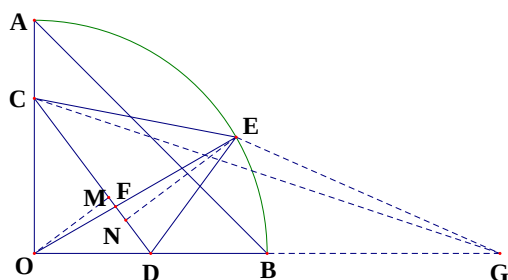
因为 $\frac{OD}{OE} = \frac{OE}{OG} = \frac{1}{2}$, $\angle DOE = \angle EOG$, 所以 $\triangle ODE \sim \triangle OEG$, 所以 $\frac{DE}{EG} = \frac{1}{2}$, 故 $EG = 2DE$.

.....20 分

所以 $CE + 2DE = CE + EG \geq CG = \sqrt{24^2 + 8^2} = 8\sqrt{10}$, 当 C, E, G 三点共线时等号成立.

故 $CE + 2DE$ 的最小值为 $8\sqrt{10}$.

.....25 分



三、(本题满分 25 分) 求所有的正整数 m, n , 使得 $\frac{m^3 + n^3 - m^2 n^2}{(m+n)^2}$ 是非负整数.

解 记 $S = \frac{m^3 + n^3 - m^2 n^2}{(m+n)^2}$, 则

$$S = \frac{(m+n)[(m+n)^2 - 3mn] - m^2 n^2}{(m+n)^2} = (m+n) - \frac{3mn}{m+n} - \left(\frac{mn}{m+n}\right)^2.$$

因为 m, n 为正整数, 故可令 $\frac{mn}{m+n} = \frac{q}{p}$, p, q 为正整数, 且 $(p, q) = 1$.

$$\text{于是 } S = (m+n) - \frac{3q}{p} - \frac{q^2}{p^2} = (m+n) - \frac{3pq + q^2}{p^2}.$$

因为 S 为非负整数, 所以 $p \mid q^2$, 又 $(p, q) = 1$, 故 $p = 1$, 即 $(m+n) \mid mn$. ①

.....10 分

所以 $\frac{n^2}{m+n} = n - \frac{mn}{m+n}$ 是整数, 所以 $(m+n) \mid n^2$, 故 $n^2 \geq m+n$, 即 $n^2 - m \geq n$.

又由 $S \geq 0$, 知 $m^3 + n^3 - m^2 n^2 \geq 0$. ②

所以 $n^3 \geq m^2 n^2 - m^3 = m^2(n^2 - m) \geq m^2 n$, 所以 $n \geq m$.

由对称性, 同理可得 $m \geq n$, 故 $m = n$20 分

把 $m = n$ 代入①, 得 $2 \mid m$, 则 $m \geq 2$. 把 $m = n$ 代入②, 得 $2m^3 - m^4 \geq 0$, 即 $m \leq 2$.

故 $m = 2$.

所以, 满足条件的正整数 m, n 为 $m = 2, n = 2$25 分

第二试 (B)

一、(本题满分 20 分) 若实数 a, b, c 满足 $(a+b+c)\left(\frac{1}{a+b-5c} + \frac{1}{b+c-5a} + \frac{1}{c+a-5b}\right) = \frac{9}{5}$, 求 $(a+b+c)\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right)$ 的值.

解 记 $a+b+c = x$, $ab+bc+ca = y$, $abc = z$, 则

$$\begin{aligned} (a+b+c)\left(\frac{1}{a+b-5c} + \frac{1}{b+c-5a} + \frac{1}{c+a-5b}\right) &= x\left(\frac{1}{x-6a} + \frac{1}{x-6b} + \frac{1}{x-6c}\right) \\ &= \frac{x[3x^2 - 12(a+b+c)x + 36(ab+bc+ca)]}{x^3 - 6(a+b+c)x^2 + 36(ab+bc+ca)x - 216abc} = \frac{x(-9x^2 + 36y)}{-5x^3 + 36xy - 216z}, \end{aligned}$$

.....10 分

结合已知条件可得 $\frac{x(-9x^2+36y)}{-5x^3+36xy-216z} = \frac{9}{5}$, 整理得 $xy = \frac{27}{2}z$. 所以

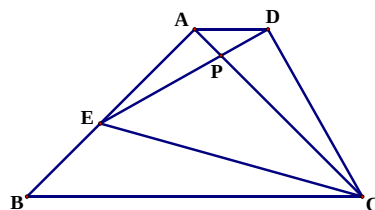
$$(a+b+c)\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right) = \frac{xy}{z} = \frac{27}{2}. \quad \dots\dots\dots 20 \text{ 分}$$

二、(本题满分 25 分) 如图, 点 E 在四边形 $ABCD$ 的边 AB 上, $\triangle ABC$ 和 $\triangle CDE$ 都是等腰直角三角形, $AB = AC$, $DE = DC$.

(1) 证明: $AD \parallel BC$; (2) 设 AC 与 DE 交于点 P , 如果 $\angle ACE = 30^\circ$, 求 $\frac{DP}{PE}$.

解 (1) 由题意知 $\angle ACB = \angle DCE = 45^\circ$, $BC = \sqrt{2}AC$, $EC = \sqrt{2}DC$,
所以 $\angle DCA = \angle ECB$, $\frac{AC}{BC} = \frac{DC}{EC}$, 所以 $\triangle ADC \sim \triangle BEC$, 故 $\angle DAC =$
 $\angle EBC = 45^\circ$, 所以 $\angle DAC = \angle ACB$, 所以 $AD \parallel BC$.

$\dots\dots\dots 10 \text{ 分}$



(2) 设 $AE = x$, 因为 $\angle ACE = 30^\circ$, 可得 $AC = \sqrt{3}x$, $CE = 2x$, $DE = DC = \sqrt{2}x$.

因为 $\angle EAP = \angle CDP = 90^\circ$, $\angle EPA = \angle CPD$, 所以 $\triangle APE \sim \triangle DPC$, 故可得 $S_{\triangle APE} = \frac{1}{2} S_{\triangle DPC}$.

$\dots\dots\dots 15 \text{ 分}$

又 $S_{\triangle EPC} + S_{\triangle APE} = S_{\triangle ACE} = \frac{\sqrt{3}}{2}x^2$, $S_{\triangle EPC} + S_{\triangle DPC} = S_{\triangle CDE} = x^2$, 于是可得

$$S_{\triangle DPC} = (2 - \sqrt{3})x^2, \quad S_{\triangle EPC} = (\sqrt{3} - 1)x^2. \quad \dots\dots\dots 20 \text{ 分}$$

$$\text{所以 } \frac{DP}{PE} = \frac{S_{\triangle DPC}}{S_{\triangle EPC}} = \frac{2 - \sqrt{3}}{\sqrt{3} - 1} = \frac{\sqrt{3} - 1}{2}. \quad \dots\dots\dots 25 \text{ 分}$$

三、(本题满分 25 分) 设 x 是一个四位数, x 的各位数字之和为 m , $x+1$ 的各位数字之和为 n , 并且 m 与 n 的最大公约数是一个大于 2 的素数. 求 x .

解 设 $x = \overline{abcd}$, 由题设知 m 与 n 的最大公约数 (m, n) 为大于 2 的素数.

若 $d \neq 9$, 则 $n = m + 1$, 所以 $(m, n) = 1$, 矛盾, 故 $d = 9$. $\dots\dots\dots 5 \text{ 分}$

若 $c \neq 9$, 则 $n = m + 1 - 9 = m - 8$, 故 $(m, n) = (m, 8)$, 它不可能是大于 2 的素数, 矛盾, 故 $c = 9$.

$\dots\dots\dots 10 \text{ 分}$

若 $b = 9$, 显然 $a \neq 9$, 所以 $n = m + 1 - 9 - 9 - 9 = m - 26$, 故 $(m, n) = (m, 26) = 13$, 但此时可得
 $n \geq 13$, $m = n + 26 \geq 39 > 36$, 矛盾. $\dots\dots\dots 15 \text{ 分}$

若 $b \neq 9$, 则 $n = m + 1 - 9 - 9 = m - 17$, 故 $(m, n) = (m, 17) = 17$, 只可能 $n = 17, m = 34$.

$\dots\dots\dots 20 \text{ 分}$

于是可得 $x = 8899$ 或 9799 .

$\dots\dots\dots 25 \text{ 分}$