数列综合讲义

前言

【高考命题规律】

年份	题号	题型	考查内容	思想方法	分值
2011年	理：17	解答题	等比数列求通项、求前n项和	方程组思想	12分
	文：6	选择题	等差数列的基本公式	方程组思想	5分
	文：17	解答题	等比数列求通项、求前n项和	方程组思想	10分
2012年	理：5	选择题	等比数列的性质	方程组思想	5分
	理：16	填空题	数列的周期性	利用周期性求和	5分
	文：12	选择题	数列的周期性	利用周期性求和	5分
	文：14	填空题	等比数列前n项和	方程思想	5分
2013年	理：7	选择题	等差数列前n项和	方程思想	5分
	理：12	选择题	与三角形的综合应用判断数列的增（减）性	特殊、比较	5分
	理：14	填空题	由a_n与S_n关系求a_n	比差法	5分
	文：6	选择题	等比数列通项、前n项和	方程思想	5分
	文：17	解答题	等差数列通项、前n项和	方程组、列项相消	12分
2014年	理：17	解答题	由a_n与S_n关系判定及证明	比差法	12分
	文：17	解答题	等差数列通项 前n项和 及一元二次的解法，	乘公比错位相消 方程组	12分
2015年	理:17	解答题	由a_n与S_n关系求通项；前n项和	换元法，裂项相消法	12分
	文:7	选择题	等差数列：基本量求某一项；	方程思想	5分
	文:13	填空题	等比数列：基本量求项数	方程思想	5分
2016年	理：3	选择题	等差数列，基本量求某一项	方程思想	5分
	理：15	填空题	等比数列，累积求最值	函数思想	5分
	文：17	解答题	等差数列通项公式，等比数列前n项和S_n	赋值，利用公式求和	12分
2017年	理：4	选择题	等差数列，基本量求公差	方程思想	5分
	理：12	选择题	数列分群问题	等比数列求和	5分
	文：17	解答题	等比数列求通项，判定等差	方程思想	12分

纵观全国Ⅰ卷的数列试题，我们可以发现，全国Ⅰ卷的数列题注重基础，强调双基，讲究解题的通性通法，常常以“找常数”、“找邻居”、“找配对”、“构函数”作为数列问题一大亮点。从2011年至2017年，全国Ⅰ卷理科试题共考查了12道数列题，其中9道都是标准的等差或等比数列，主要考查等差或等比数列的定义、性质、通项、前n项和、某一项的值或某几项的和以及证明等差或等比数列等基础知识。而文科试题共考查了11道数列题，其中9道也都是标准的等差或等比数列，主要考查数列的性质、求通项、求和、求数列有关基本量以及证明等差或等比数列等基础知识。

【基础知识】

一、等差等比对比

类型 项目	等差数列	等比数列
定义	$a_{n+1}-a_n=d\,(n\geq 1)$	$\dfrac{a_{n+1}}{a_n}=q$
中项（a,A,b）	$a+b=2A$	$ab=A^2$
通项公式	$a_n=a_1+(n-1)d$ $=a_m+(n-m)d$	$a_n=a_1q^{n-1}=a_mq^{n-m}$
$m+n=p+q$	$a_m+a_n=a_p+a_q$	$a_m\cdot a_n=a_p\cdot a_q$
$S_m,S_{2m}-S_m,S_{3m}-S_{2m}$	成公差为 m^2d 的等差数列	成公比为 q^m 的等比数列
S_n	$S_n=\dfrac{a_1+a_n}{2}\cdot n=\dfrac{a_p+a_q}{2}\cdot n$ 或 $S_n=na_1+\dfrac{n(n-1)}{2}d$	$S_n=\begin{cases}na_1\,(q=1)\\ \dfrac{a_1(1-q^n)}{1-q}\text{或}\dfrac{a_1-a_nq}{1-q}\,(q\neq 1)\end{cases}$
单调性	$\begin{cases}\text{单调递增：}d>0\\ \text{单调递减：}d<0\end{cases}$	$\begin{cases}\text{单调递增}\begin{cases}a_1>0,q>1(1,2,4,8)\\ a_1<0,0<q<1(-8,-4,-2,-\end{cases}\\ \text{单调递减}\begin{cases}a_1>0,0<q<1(8,4,2,1)\\ a_1<0,q>1(-1,-2,-4,8)\end{cases}\end{cases}$

二、等差等比补充

等差数列篇：

1、判定：① $a_{n+1}-a_n=d\,(n\geq 1)$； $a_n-a_{n-1}=d\,(n\geq 2)$；

② $a_{n+1}+a_{n-1}=2a_n\,(n\geq 1)$（等差中项法）

③ $a_n=kn+b$， $S_n=\dfrac{a_1+a_n}{2}\cdot n=\dfrac{a_p+a_q}{2}\cdot n=na_1+\dfrac{n(n-1)}{2}d$，

$S_n=An^2+Bn$ <u>（可用于选择填空快速判断，不可用于证明）</u>

2、函数的观点看数列

（i）$a_n = a_1 + (n-1)d = d \cdot n + a_1 - d$，所以该通项公式可看作 a_n 关于 n 的一次函数，

从而可通过函数的角度分析等差数列的性质。

（ii）$S_n = na_1 + \dfrac{n(n-1)}{2}d = \dfrac{d}{2}n^2 + (a_1 - \dfrac{1}{2}d)n$，即 S_n 是关于项数 n 的二次函数，且

不含常数项，可记为 $S_n = An^2 + Bn$ 的形式。从而可将 S_n 的变化规律图像化

3、数列 $\{\dfrac{S_n}{n}\}$ 也是等差数列

4、若两个等差数列 $\{a_n\},\{b_n\}$ 的前 n 和分别为 S_n, T_n，则 $\dfrac{a_n}{b_n} = \dfrac{S_{2n-1}}{T_{2n-1}}$

5、奇偶数项问题（会自行推导）

项数为 $2n$ 项：$S_{偶} - S_{奇} = nd$　　　项数为 $2n-1$ 项：$S_{奇} - S_{偶} = a_n$

等比数列篇：

1、判定：①$\dfrac{a_{n+1}}{a_n} = q\left(n \in N^*\right)$

②对于 $\forall n \in N^*$，均有 $a_{n+1}^2 = a_n a_{n+2}$（等比中项法）

③$a_n = k \cdot q^n$（指数类函数）$S_n = \dfrac{a_1(1-q^n)}{1-q} = \dfrac{a_1}{1-q} - \dfrac{a_1}{1-q} \cdot q^n = k \cdot q^n - k$

（可用于选择填空快速判断，不可用于证明）

2、函数的观点看数列

等比数列 $\{a_n\}$ 的通项公式 $a_n = a_1 \cdot q^{n-1} (a_1 q \neq 0)$ 还可以改写成 $a_n = \dfrac{a_1}{q} \times q^n$，

当 $q > 0$ 且 $a_1 \neq 0$ 时，$y = q^x$ 是一个指数函数，而 $y = \dfrac{a_1}{q} \times q^x$ 是指数型函数.

因此等比数列 $\{a_n\}$ 的点列 $(n，a_n)$ 分布在指数型函数 $y = \dfrac{a_1}{q} \times q^x$ 的图像上，

即等比数列 $\{a_n\}$ 的图像是函数 $y = \dfrac{a_1}{q} \times q^x$ 的图像上的一群孤立点

三、数列的周期性

类比周期函数的概念，我们可定义：对于数列$\{a_n\}$，如果存在一个常数T $(T\in N^+)$，使得对任意的正整数$n>n_0$恒有$a_{n+T}=a_n$成立，则称数列$\{a_n\}$是从第n_0项起的周期为T的周期数列。若$n_0=1$，则称数列$\{a_n\}$为纯周期数列，若$n_0\geq 2$，则称数列$\{a_n\}$为混周期数列，T的最小值称为最小正周期，简称周期

常见周期如下所列：

（1） $a_n+a_{n-1}=s\Rightarrow T=2$　　$a_na_{n-1}=s\Rightarrow T=2$　　$a_{n+1}=\dfrac{1-a_n}{1+a_n}\Rightarrow T=2$

特别地，$a_{n+1}=\dfrac{xa_n+y}{ka_n+b},x=b\Rightarrow T=2$

（2） $a_n+a_{n-1}+a_{n-2}=s\Rightarrow T=3$　　$a_n\cdot a_{n-1}\cdot a_{n-2}=s\Rightarrow T=3$

$a_{n+1}=-\dfrac{1}{1+a_n}\Rightarrow T=3$　　$a_{n+1}=1-\dfrac{1}{a_n}\Rightarrow T=3$

（3） $a_{n+1}=\dfrac{1+a_n}{1-a_n}\Rightarrow T=4$　　$a_{n+1}=\dfrac{1-a_n}{1+a_n}\Rightarrow T=2$　　$a_{n+1}=\dfrac{a_n-1}{a_n+1}\Rightarrow T=4$

（4） $a_{n+2}=a_{n+1}-a_n\Rightarrow T=6$

$$a_n=\frac{\sqrt{3}a_{n-1}+1}{\sqrt{3}-a_{n-1}}=\frac{a_{n-1}+\frac{\sqrt{3}}{3}}{1-\frac{\sqrt{3}}{3}a_n}\Rightarrow T=6\text{（类比}\tan(\theta+\frac{\pi}{6})=\frac{\tan\theta+\tan\frac{\pi}{6}}{1-\tan\theta\tan\frac{\pi}{6}}\text{）}$$

四、几个常见的求和公式

（1）$\displaystyle\sum_{i=1}^{n}i=\frac{n(n+1)}{2}$

（2）$\displaystyle\sum_{i=1}^{n}i^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

（3）$\displaystyle\sum_{i=1}^{n}i^3=[\frac{n(n+1)}{2}]^2$

第 1 讲　数列通项

【高考真题】

（2016 全国Ⅰ卷文）已知$\{a_n\}$是公差为3的等差数列，数列$\{b_n\}$满足$b_1=1,b_2=\frac{1}{3}$，$a_nb_{n+1}+b_{n+1}=nb_n$，则$\{a_n\}$的通项公式是$a_n=$________

（2015 全国Ⅰ卷）S_n为数列{a_n}的前n项和.已知a_n＞0，$a_n^2+a_n=4S_n+3$

则$\{a_n\}$的通项公式为______________

（2013 全国Ⅰ卷文）已知等差数列$\{a_n\}$的前n项和S_n满足$S_3=0,S_5=-5$，则$\{a_n\}$的通项公式是$a_n=$________

（2013 全国Ⅰ卷理）若数列$\{a_n\}$的前n项和$S_n=\frac{2}{3}a_n+\frac{1}{3}$，则$\{a_n\}$的通项公式是$a_n=$________

（2010 全国Ⅰ卷理）设数列$\{a_n\}$满足$a_1=2,a_{n+1}-a_n=3\cdot 2^{2n-1}$，则$\{a_n\}$的通项公式是$a_n=$________

（2009 全国Ⅰ卷文）设等差数列$\{a_n\}$的前n项和为S_n，公比是正数的等比数列$\{b_n\}$的前n项和为T_n.已知$a_1=1,b_1=3,a_3+b_3=17,T_3-S_3=12$，求$\{a_n\},\{b_n\}$的通项公式

（2007 全国卷Ⅰ文）设$\{a_n\}$是等差数列，$\{b_n\}$是各项都为正数的等比数列，且$a_1=b_1=1$，$a_3+b_5=21$，$a_5+b_3=13$，求$\{a_n\}$、$\{b_n\}$的通项公式

（2005 全国卷Ⅰ文）设正项等比数列$\left\{a_n\right\}$的首项$a_1=\frac{1}{2}$，前 n 项和为S_n，且$2^{10}S_{30}-(2^{10}+1)S_{20}+S_{10}=0$，则$\{a_n\}$的通项公式是$a_n=$________

1.1 公式法

①等差比通项公式

②万能公式$a_n=\begin{cases}S_1 & ,(n=1)\\ S_n-S_{n-1},&(n\ge 2)\end{cases}$注意通项**能否合并**

（2017.12 化州二模）已知S_n为数列$\{a_n\}$的前n项和，且$\log_2(S_n+1)=n+1$，则数列$\{a_n\}$的通项公式为__________

（2016.9 广东适应性考试）已知数列$\{a_n\}$的各项均为正数，S_n为其前n项和，且对任意$n\in N^*$，均有a_n、S_n、a_n^2成等差数列，则$a_n=$____________

1.2 累加法

<u>形如$a_{n+1}=a_n+f(n)$型的递推数列</u>

例：数列$\{a_n\}$满足：$a_1=1$，且$a_{n+1}-a_n=2^n+1$，求a_n

（2017.04 武汉调研）已知数列$\{a_n\}$满足$a_1=1$，$a_2=\dfrac{1}{3}$，若$a_n(a_{n-1}+2a_{n+1})=3a_{n-1}\cdot a_{n+1}(n\ge 2,n\in N^*)$，则数列$\{a_n\}$的通项$a_n=$（　　）

（A）$\dfrac{1}{2^{n-1}}$　　（B）$\dfrac{1}{2^n-1}$　　（C）$\dfrac{1}{3^{n-1}}$　　（D）$\dfrac{1}{2^{n-1}+1}$

（2017 河北衡水六调改）若数列$\{a_n\}$满足$a_1=1$，且对于任意的$n\in N^*$都有$a_{n+1}=a_n+n+1$，则$\dfrac{1}{a_1}+\dfrac{1}{a_2}+\ldots+\dfrac{1}{a_{2018}}=$__________

1.3 累乘法

<u>形如 $a_{n+1}=a_n\cdot f(n)\left(\dfrac{a_{n+1}}{a_n}=f(n)\right)$ 型的递推数列</u>

例：已知数列 $\{a_n\}$ 满足：$a_1=1$，且 $na_{n+1}=(n+1)a_n$，求 a_n

变式：设 $\{a_n\}$ 是首项为 1 的正项数列，且 $(n+1)a_{n+1}^2-na_n^2+a_{n+1}a_n=0(i=1,2,3,...)$，则

$a_n=$_________

1.4 差商法

（2017.12 广州调研）已知数列 $\left\{a_n\right\}$ 满足 $a_1+4a_2+4^2a_3+\cdots+4^{n-1}a_n=\dfrac{n}{4}\left(n\in\mathbf{N}^*\right)$.

求数列 $\left\{a_n\right\}$ 的通项公式

已知数列 $\left\{a_n\right\}$ 中，$a_1=1$，对所有 $n\in N^*$ 且 $n\geq 2$ 时都有 $a_1\cdot a_2\cdot a_3\cdot\ldots\cdot a_n=n^2$，求 $\left\{a_n\right\}$

1.5 构造辅助数列

类型 1：形如 $a_{n+1}=pa_n+q$（其中 p,q 均为常数且 $p\neq 0$）

类型 2：形如 $a_{n+1}=pa_n+f(n)\ (p\neq 1)$

类型 3：形如 $a_{n+1}=\dfrac{ma_n}{pa_n+q}$

类型 4：形如 $a_{n+2}=pa_{n+1}+qa_n$

特别地，当 $p=q=1$ 时，便是著名的兔子数列，也就是斐波那契数列，

其通项可通过特征根方程求得 $a_n=\dfrac{\sqrt{5}}{5}[(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2})^n-(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2})^n]$

类型 5：形如 $a_{n+1}=pa_n^q(p>0,a_n>0)$

1、**（2017.10 惠州二调）**已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1=1,a_{n+1}-2a_n=2^n(n\in N^*)$，则数列 $\{a_n\}$ 的通项公式为 $a_n=$____________

变式 1：已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1=1,a_{n+1}-2a_n=3^n(n\in N^*)$，则数列 $\{a_n\}$ 的通项公式为 $a_n=$____________

变式 2：已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1=1,a_{n+1}-2a_n=1(n\in N^*)$，则数列 $\{a_n\}$ 的通项公式为 $a_n=$____________

变式 3：已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1=1,a_{n+1}-2a_n=n(n\in N^*)$，则数列 $\{a_n\}$ 的通项公式为 $a_n=$____________

2、**（2017 云南师大附中月考）**已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1=2$，且 $a_n=\dfrac{2na_{n-1}}{a_{n-1}+n-1}(n\geq 2,n\in N^*)$，则 $a_n=$__________

3、设数列 $\{a_n\}$ 满足：$a_1=1,a_2=2$，且对于其中任意三个连续的项 a_{n-1},a_n,a_{n+1}，都有：$a_n=\dfrac{(n-1)a_{n-1}+(n+1)a_{n+1}}{2n}$，求 $\{a_n\}$ 通项公式

第 2 讲　数列求和

【高考真题】

（2016 全国Ⅰ卷文）已知$\{a_n\}$是公差为3的等差数列，数列$\{b_n\}$满足$b_1=1,b_2=\dfrac{1}{3}$，$a_nb_{n+1}+b_{n+1}=nb_n$，求$\{b_n\}$的前n项和

（2015 全国Ⅰ卷文）数列$\left\{a_n\right\}$中$a_1=2,a_{n+1}=2a_n,S_n$为$\left\{a_n\right\}$的前n项和，若$S_n=126$，则$n=$_______

（2015 全国Ⅰ卷理）S_n为数列{a_n}的前n项和.已知$a_n>0$，$a_n^2+a_n=4S_n+3$，设$b_n=\dfrac{1}{a_na_{n+1}}$，则数列$b_n$的前$n$项和为______________

（2013 全国卷Ⅰ文）已知等差数列$\{a_n\}$的前n项和S_n满足$S_3=0,S_5=-5$，求数列$\{\dfrac{1}{a_{2n-1}a_{2n+1}}\}$的前$n$项和

（2012 全国Ⅰ文）已知数列$\{a_n\}$的前n项和为S_n，$a_1=1,S_n=2a_{n+1}$，则$S_n=(\quad)$

（A）2^{n-1}　（B）$(\dfrac{3}{2})^{n-1}$　（C）$(\dfrac{2}{3})^{n-1}$　（D）$\dfrac{1}{2^{n-1}}$

（2010 全国Ⅰ文）记等差数列$\{a_n\}$的前n项和为S_n，设$S_3=12$，且$2a_1,a_2,a_3+1$成等比数列，求S_n

（2010 全国Ⅰ卷理）设数列$\{a_n\}$满足$a_1=2,a_{n+1}-a_n=3\cdot 2^{2n-1}$，设$b_n=na_n$，求数列$\{b_n\}$的前$n$项和

（2009 全国卷Ⅰ理）在数列$\{a_n\}$中，$a_1=1,a_{n+1}=(1+\frac{1}{n})a_n+\frac{n+1}{2^n}$

（Ⅰ）设$b_n=\frac{a_n}{n}$，求数列$\{b_n\}$的通项公式

（Ⅱ）求数列$\{a_n\}$的前n项和S_n

（2007 全国卷Ⅰ文）设$\{a_n\}$是等差数列，$\{b_n\}$是各项都为正数的等比数列，且$a_1=b_1=1$，$a_3+b_5=21$，$a_5+b_3=13$，求$\{\frac{a_n}{b_n}\}$的前n项和

（2005 全国Ⅰ文）设正项等比数列$\left\{a_n\right\}$的首项$a_1=\frac{1}{2}$，前n项和为S_n，且$2^{10}S_{30}-(2^{10}+1)S_{20}+S_{10}=0$，求$\left\{nS_n\right\}$的前$n$项和$T_n$

2.1 公式法

（1）等差数列求和公式：$S_n=\frac{a_1+a_n}{2}\cdot n=\frac{a_p+a_q}{2}\cdot n\left(p+q=n+1\right)$

$$S_n=a_1n+\frac{n\left(n-1\right)}{2}d$$

（2）等比数列求和公式：$S_n=\begin{cases}\frac{a_1\left(1-q^n\right)}{1-q},q\neq 1\\ na_1,q=1\end{cases}$

2.2 倒序相加

通项公式特点：$a_n=$等差$\times$等比，比如$a_n=n\cdot 2^n$，其中n代表一个等差数列的通项公式（关于n的一次函数），2^n代表一个等比数列的通项公式（关于n的指数型函数），那么便可以使用错位相减法

例：已知函数$f\left(x\right)=\frac{1}{x^2+1}$，求：

$f(\frac{1}{2015})+f(\frac{1}{2014})+\cdots+f(\frac{1}{2})+f\left(1\right)+f\left(2\right)+\cdots+f\left(2015\right)$

（**2017.12 衡水六调**）已知函数$f\left(x\right)=\frac{e^x}{e^x+1}$，数列$\left\{a_n\right\}$为等比数列，$a_n>0$,且$a_{1\,009}=1$，则$f\left(\ln a_1\right)+f\left(\ln a_2\right)+\cdots+f\left(\ln a_{2017}\right)=$____________

2.3 分组求和

通项公式特点：有一类数列，既不是等差数列，也不是等比数列， 可把数列的每一项分成多个项或把数列的项重新组合，使其转化成常见的数列，然后分别求和，再将其合并即可

例 1 求数列的前 n 项和：$1+1,\frac{1}{a}+4,\frac{1}{a^{2}}+7,\cdots,\frac{1}{a^{n-1}}+3n-2$，…

例 2 求数列 $\left\{n\left(n+1\right)\left(2n+1\right)\right\}$ 的前 n 项和.

2.4 裂项求和

通项公式特点：a_n 的表达式能够拆成形如 $a_n=f\left(n\right)-f\left(n-k\right)$ 的形式（$k=1,2,\cdots$），从而在求和时可以进行相邻项（或相隔几项）的相消。从而结果只存在有限几项，达到求和目的。其中通项公式为分式和根式的居多

较为常见的裂项形式：

（1）$a_n=\frac{1}{n(n+1)}=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}$ （2）$\frac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}}=\sqrt{n+1}-\sqrt{n}$

（3）$a_n=\frac{(2n)^2}{(2n-1)(2n+1)}=1+\frac{1}{2}(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1})$

（4）$a_n=\frac{1}{n(n+1)(n+2)}=\frac{1}{2}[\frac{1}{n(n+1)}-\frac{1}{(n+1)(n+2)}]$

（5）$\frac{2^{n-1}}{\left(2^n+1\right)\left(2^{n+1}+1\right)}=\frac{1}{2}\times\left(\frac{1}{2^n+1}-\frac{1}{2^{n+1}+1}\right)$

（6）$a_n=\frac{n+2}{n(n+1)}\cdot\frac{1}{2^n}=\frac{2(n+1)-n}{n(n+1)}\cdot\frac{1}{2^n}=\frac{1}{n\cdot 2^{n-1}}-\frac{1}{(n+1)2^n}$

（2017.10 惠州二调）已知等差数列$\left\{a_n\right\}$的前n项和为S_n，且$a_9=\dfrac{1}{2}a_{12}+6$，$a_2=4$，则数列$\left\{\dfrac{1}{S_n}\right\}$的前 10 项和为（　　）

（A）$\dfrac{11}{12}$　　（B）$\dfrac{10}{11}$　　（C）$\dfrac{9}{10}$　　（D）$\dfrac{8}{9}$

（2017 衡水四调）已知数列$\left\{a_n\right\}$的各项均为正数，$a_1=2$，$a_{n+1}-a_n=\dfrac{4}{a_{n+1}+a_n}$，若数列$\left\{\dfrac{1}{a_{n-1}+a_n}\right\}$的前$n$项和为 5，则$n=$__________

（2017.12 河北鸡泽月考）已知数列 $\{a_n\}$的前n项和$S_n=n^2+n+1$，则数列$\{\dfrac{4}{a_na_{n+1}}\}$的前$n$项和$T_n=$_________

（2017.11 天一联）设等差数列$\{a_n\}$的前n项和为S_n，首项$a_1=1$，且$\dfrac{S_{2018}}{2018}=\dfrac{S_{2017}}{2017}+1$

（Ⅰ）求a_n及S_n

（Ⅱ）求数列$\{\dfrac{1}{\sqrt{S_nS_{n+1}}}\}$的前$n$项和$T_n$

（2014，桐乡市校级期中）设数列$\left\{a_n\right\}$，其前n项和$S_n=-3n^2$，$\left\{b_n\right\}$为单调递增的等比数列，$b_1b_2b_3=512$，$a_1+b_1=a_3+b_3$

（1）求数列$\left\{a_n\right\},\left\{b_n\right\}$的通项公式

（2）若$c_n=\dfrac{b_n}{\left(b_n-2\right)\left(b_n-1\right)}$，求数列$\left\{c_n\right\}$的前$n$项和$T_n$

2.5 错位相减求和

通项公式特点：$a_n=$等差$\times$等比，比如$a_n=n\cdot 2^n$，其中n代表一个等差数列的通项公式（关于n的一次函数），2^n代表一个等比数列的通项公式（关于n的指数型函数），那么便可以使用错位相减法

（2017.01珠海期末）已知$\{a_n\}$为等比数列，$a_1=1$，$a_4=27$，S_n为等差数列$\{b_n\}$的前n项和，$b_1=3$，$S_5=35$

（Ⅰ）求$\{a_n\}$和$\{b_n\}$的通项公式

（Ⅱ）设数列$\{c_n\}$满足$c_n=a_nb_n(n\in N^*)$，求数列$\{c_n\}$的前n项和T_n

（2017 山西五校联考）已知等差数列$\left\{a_n\right\}$的公差$d>0$，且$a_1\cdot a_6=11,a_3+a_4=12$

（Ⅰ）求数列$\left\{a_n\right\}$的通项公式

（Ⅱ）求数列$\left\{\dfrac{a_{n+1}-2a_n}{2^{n+1}}\right\}$的前项和$T_n$

2.6 等差绝对值求和

例：已知数列$\left\{a_n\right\}$为等差数列，其前n项和为S_n，且$a_3=5,S_9=9$，数列$b_n=\left|a_n\right|$

（Ⅰ）求$\left\{a_n\right\}$的通项公式

（Ⅱ）求数列b_n的前n项和T_n

（2016.01 珠海高三期末）已知等差数列$\{a_n\}$的公差不为零，$a_1=11$，且a_2，a_5，a_6成等比数列.

（Ⅰ）求$\{a_n\}$的通项公式

（Ⅱ）设$S_n=\left|a_1\right|+\left|a_2\right|+\left|a_3\right|+\cdots+\left|a_n\right|$，求 S_n.

2.7 奇偶并项求和（详见 4.3 数列的奇偶性）

第 3 讲 数列的通项与求和综合

【高考真题】

（2017 全国Ⅰ卷文 17）记$\{S_n\}$为等比数列$\{a_n\}$的前n项和，已知$S_2=2,S_3=6$

（Ⅰ）求$\{a_n\}$的通项公式;

（Ⅱ）求S_n，并判断S_{n+1},S_n,S_{n+2}是否成等差数列

（2013 全国Ⅰ卷理）设等差数列$\{a_n\}$的前n项和为S_n，若$S_{m-1}=-2,S_m=0,S_{m+1}=3$，则$m=($　　$)$

（A）3　　（B）4　　（C）5　　（D）6

（2014 全国Ⅰ理）已知数列$\{a_n\}$的前n项和为S_n，$a_1=1$，$a_n\neq 0$，$a_na_{n+1}=\lambda S_n-1$，其中λ为常数，

（Ⅰ）证明：$a_{n+2}-a_n=\lambda$

（Ⅱ）是否存在λ，使得$\{a_n\}$为等差数列？并说明理由

（2011 全国Ⅰ文）已知等比数列$\{a_n\}$中，$a_1=\dfrac{1}{3}$，公比$q=\dfrac{1}{3}$

（Ⅰ）S_n为$\{a_n\}$的前n项和，证明：$S_n=\dfrac{1-a_n}{2}$

（Ⅱ）设$b_n=\log_3a_1+\log_3a_2+...+\log_3a_n$，求$\{b_n\}$的通项公式

（2008 全国Ⅰ文）在数列$\{a_n\}$中，$a_1=1,a_{n+1}=2a_n+2^n$

（Ⅰ）设$b_n=\dfrac{a_n}{2^{n-1}}$．证明：数列$\{b_n\}$是等差数列

（Ⅱ）求数列$\{a_n\}$的前n项和S_n

【典例精讲】

1、**（2017.12 上海金山区一调）**数列$\{a_n\}$的通项公式是$a_n=2^{n-1}$，数列$\{b_n\}$的通项公式是$b_n=3n(n\in N^*)$，令集合$A=\{a_1,a_2,...a_n\}$，$B=\{b_1,b_2,...b_n\}$.将集合$A\bigcup B$中的所有元素按从小到大的顺序排列，构成的数列记为$\{c_n\}$．则数列$\{c_n\}$的前 28 项的和$S_{28}=$______

2、**（2017.08 南昌摸底）**已知数列$\{a_n\}$的前n项和$S_n=2^{n+1}-2$，数列$\{b_n\}$满足$b_n=S_n(n\in N^*)$.

（Ⅰ）求数列$\{a_n\}$的通项公式

（Ⅱ）求数列$\{b_n\}$的前n项和T_n

3、**（2017.03 广州一模）**已知数列$\{a_n\}$的前n项和为S_n，且$S_n=2a_n-2$（$n\in \mathbf{N}^*$）

（Ⅰ）求数列$\{a_n\}$的通项公式

（Ⅱ）求数列$\{S_n\}$的前n项和T_n

4、**（2017.08 安徽六校一联）**已知数列$\left\{a_n\right\}$的前n项和为S_n，满足$a_1=2$，$a_{n+1}=2S_n+2,\left(n\geq 1\right)$

（Ⅰ）求数列$\left\{a_{\mathrm{n}}\right\}$的通项公式

（Ⅱ）若数列$\left\{b_n\right\}$满足：$b_n=a_n+\left(-1\right)^n\log_3 a_n$，求数列$\left\{b_n\right\}$的前$2n$项和$S_{2n}$

5、**（2017.10 河南天一联二测）**已知数列$\left\{a_n\right\}$的首项为$a_1=1$，且$a_{n+1}=2\left(a_n+1\right)\left(n\in N^*\right)$.

（Ⅰ）求数列$\left\{a_n\right\}$的通项公式；

（Ⅱ）若$b_n=\log_2(\dfrac{a_{n-1}+2}{3})$，求数列$\{\dfrac{1}{b_bb_{n+1}}\}$的前$n$项和$T_n$.

6、（2017.12 广东七校二联）设数列$\{a_n\}$满足$a_1+3a_2+5a_3+\cdots+(2n-1)a_n=2n$

（Ⅰ）求$\{a_n\}$的通项公式

（Ⅱ）数列$\{b_n\}$满足$\log_2(b_n-1)=\frac{1}{a_n}+\frac{3}{2}$，求数列$\{b_n\}$的前$n$项和$S_n$

7、（2017 衡水四调）已知数列$\{a_n\}$的前n项和为S_n，且$S_n=2n^2+n$，$n\in N$，数列$\{b_n\}$满足$a_n=4\log_2 b_n+3$，$n\in N$

（Ⅰ）求a_n,b_n

（Ⅱ）求数列$\{a_nb_n\}$的前n项和T_n

8、（2017 衡水一调） 已知数列$\{a_n\}$是等差数列，且$a_1=2,a_1+a_2+a_3=12$

（Ⅰ）求数列$\{a_n\}$的通项公式

（Ⅱ）令$b_n=a_n\cdot 3^n$，求数列$\{b_n\}$的前 n 项和S_n

9、（2017.12 化州二模）设数列$\{a_n\}$满足$a_1=1$，点(a_n,a_{n+1})（$n\in N^*$）均在直线$y=2x+1$上.

（Ⅰ）证明：数列$\{a_n+1\}$为等比数列，并求出数列$\{a_n\}$的通项公式

（Ⅱ）若$b_n=\log_2(a_n+1)$，求数列$\{(a_n+1)\cdot b_n\}$的前n项和T_n

10、（2017.12 广东百校二联）已知正项数列$\left\{a_n\right\}$满足$a_1=1,a_n^2+a_n=a_{n+1}^2-a_{n+1}$，数列$\left\{b_n\right\}$的前项和$S_n$满足$S_n=n^2+a_n$.

（Ⅰ）求数列$\left\{a_n\right\}$，$\left\{b_n\right\}$的通项公式

（Ⅱ）求数列$\{\frac{1}{a_{n+1}b_n}\}$ 的前n项和T_n

11、（2017.12 福建华安月考）已知等差数列$\left\{a_n\right\}$的前n项和为S_n，公差为2，且a_1，S_2，S_4成等比数列.

（Ⅰ）求数列$\left\{a_n\right\}$的通项公式

（Ⅱ）设$b_n=\frac{a_n+2-n}{2^n}$（$n\in N^*$），求数列$\left\{b_n\right\}$的前n项和T_n

12、（2017.04 山东德州二模）已知等比数列$\left\{a_n\right\}$的前n项和为S_n，且$6S_n=3^{n+1}+a$（$a\in N_+$）.

（Ⅰ）求a的值及数列$\left\{a_n\right\}$的通项公式

（Ⅱ）设$b_n=\frac{(-1)^{n-1}(2n^2+2n+1)}{(\log_3 a_n+2)^2(\log_3 a_n+1)^2}$，求$\left\{b_n\right\}$的前$n$项和$T_n$

第 4 讲 数列的性质

【高考真题】

（2015 全国Ⅰ卷）设等比数列$\{a_n\}$满足$a_1+a_3=10, a_2+a_4=5$，则$a_1a_2....a_n$的最大值为__________

（2015 全国 1 文）已知$\{a_n\}$是公差为 1 的等差数列，S_n为$\{a_n\}$的前n项和，若$S_8=4S_4$，则$a_{10}=$（　　）

（A）$\frac{17}{2}$　　（B）$\frac{19}{2}$　　（C）10　　（D）12

（2013 全国I文）设首项为 1，公比为$\frac{2}{3}$的等比数列$\{a_n\}$的前n项和为S_n，则(　　).

（A）$S_n=2a_n-1$　　（B）$S_n=3a_n-2$　　（C）$S_n=4-3a_n$　　（D）$S_n=3-2a_n$

（2011 全国I文）设S_n为等差数列$\{a_n\}$的前n项和，若$a_1=1$，公差$d=2$，$S_{n+2}-S_n=24$，则$k=$（　　）

（A）8　　（B）7　　（C）6　　（D）5

（2010 全国I文）已知各项均为正数的等比数列$\{a_n\}$中，$a_1a_2a_3=5, a_7a_8a_9=10$，则$a_4a_5a_6=$（　　）

（A）$5\sqrt{2}$　　（B）7　　（C）6　　（D）$4\sqrt{2}$

（2009 全国I文）设等差数列$\{a_n\}$的前n项和为S_n，若$S_9=72$，则$a_2+a_4+a_9=$______

（2008 全国I）已知等比数列$\{a_n\}$满足$a_1+a_2=3$，$a_2+a_3=6$，则$a_7=$（　　）

（A）64　　（B）81　　（C）128　　（D）243

（2007 全国I文）等比数列$\{a_n\}$的前n项和为S_n，已知S_1，$2S_2$，$3S_3$成等差数列，则$\{a_n\}$的公比为______

4.1 单调性

1．判断数列单调性的方法：

（1）根据数列单调性的定义判断：若 $a_{n+1} > a_n$，则 $\{a_n\}$ 是递增数列；若 $a_{n+1} > a_n$，则 $\{a_n\}$ 是递减数列；若 $a_{n+1} = a_n$，则 $\{a_n\}$ 是常数列；

（2）根据数列通项公式转化为对应函数，利用函数性质判断；

（3）根据函数图像判断；

2．根据数列的单调性可以解决数列中的最值问题：

（1）利用当 $\begin{cases} a_n \ge a_{n+1} \\ a_n \ge a_{n-1} \end{cases}$ 时，a_n 是数列中的最大项；利用当 $\begin{cases} a_n \le a_{n+1} \\ a_n \le a_{n-1} \end{cases}$ 时，a_n 是数列中的最小项来求数列的最值；

（2）构造函数，通过作差．作商等方法来确定函数单调性，从而进一步求出数列的最值；

例：已知数列 $\{a_n\}, a_1 = 1$，前 n 项和 S_n 满足 $nS_{n+1} - (n+3)S_n = 0$

（Ⅰ）求 $\{a_n\}$ 的通项公式

（Ⅱ）设 $c_n = 2^n(\dfrac{n}{a_n} - \lambda)$，若数列 $\{c_n\}$ 是单调递减数列，求实数 λ 的取值范围

1、数列 $\{a_n\}$ 是递增数列，且对于任意的 $n \in N^*, a_n = n^2 + \lambda n$ 恒成立，则实数 λ 的取值范围______

2、已知数列 $\{\dfrac{9^n(n+1)}{10^n}\}$ 中第 k 项最大，则 k = ____________

3、数列 $\{a_n\}$ 中，$a_n = \dfrac{n - \sqrt{2011}}{n - \sqrt{2012}}$，则此数列最大项的值是（　　）

（A） a_1，a_{50}　　（B）a_1，a_{44}　　（C） a_{45}，a_{44}　　（C） a_{45}，a_{50}

4、设函数 $f(x)=\begin{cases}(3-a)x-3 & (x\le 7),\\ a^{x-6} & (x>7),\end{cases}$ 数列 $\left\{a_n\right\}$ 满足 $a_n=f(n)$， $n\in\mathbf{N}^*$，且数列 $\left\{a_n\right\}$ 满足 $a_n=f(n)$， $n\in\mathbf{N}^*$，且数列 $\left\{a_n\right\}$ 是递增数列，则实数 a 的取值范围是____________

5、（**2013 全国Ⅰ卷理** 12）设 $\Delta A_nB_nC_n$ 的三边长分别为 a_n,b_n,c_n， $\Delta A_nB_nC_n$ 的面积为，$S_n,n=1,2,3....$，若 $b_1>c_1$， $b_1+c_1=2a_1$， $a_{n+1}=a_n,b_{n+1}=\dfrac{c_n+a_n}{2},c_{n+1}=\dfrac{b_n+a_n}{2}$，则（　　）

（A）$\{S_n\}$ 为递减数列

（B）$\{S_n\}$ 为递增数列

（C）$\{S_{2n-1}\}$ 为递增数列，$\{S_{2n}\}$ 为递减数列

（D）$\{S_{2n-1}\}$ 为递减数列，$\{S_{2n}\}$ 为递增数列

6、（**2014 湖南卷**）已知数列 $\left\{a_n\right\}$ 满足 $a_1=1,\left|a_{n+1}-a_n\right|=p^n,n\in N^*$

（Ⅰ）若 $\left\{a_n\right\}$ 是递增数列，且 $a_1,2a_2,3a_3$ 成等差数列，求 p 的值

（Ⅱ）若 $p=\dfrac{1}{2}$，且 $\left\{a_{2n-1}\right\}$ 是递增数列，$\left\{a_{2n}\right\}$ 是递减数列，求数列 $\left\{a_n\right\}$ 的通项公式

4.2 数列的最值（范围）

例 1：设等差数列$\left\{a_n\right\}$的前n项和为S_n，且满足$S_{15}>0,S_{16}<0$，则$\frac{S_1}{a_1},\frac{S_2}{a_2},\cdots,\frac{S_{15}}{a_{15}}$中最大的项为（　　）

（A）$\frac{S_7}{a_7}$　　（B）$\frac{S_6}{a_6}$　　（C）$\frac{S_9}{a_9}$　　（D）$\frac{S_8}{a_8}$

例 2:已知$\left\{a_n\right\}$是等差数列,公差$d\neq 0$,其前n项和为S_n,若a_3,a_4,a_8成等比数列,则(　　)

（A）$a_1d>0,dS_4>0$　　（B）$a_1d<0,dS_4<0$

（C）$a_1d>0,dS_4<0$　　（D）$a_1d<0,dS_4>0$

1、**（2017.03 厦门一测）**已知$\left\{a_n\right\}$是等差数列，其前n项和为S_n，$a_1+a_3+a_5=15$，$a_2+a_4+a_6=0$，则S_n的最大值为______

2、**（2017 安徽马鞍山二模）**设等差数列$\left\{a_n\right\}$的前项和为S_n，若$S_4\geq 10$，$S_5\leq 15$，则a_4的最大值为（　）

（A）2　　（B）3　　（C）4　　（D）5

3、**（2017.12 广州调研）**在各项都为正数的等比数列$\left\{a_n\right\}$中，若$a_{2018}=\frac{\sqrt{2}}{2}$，则$\frac{1}{a_{2017}}+\frac{2}{a_{2019}}$的最小值为________

4、**（2017.12 上海徐汇区一调）**若公差为d的等差数列$\{a_n\}\left(n\in N^*\right)$满足$a_3a_4+1=0$，则公差$d$的取值范围是_______

5、**（2017.03 广州一模）**设S_n为数列$\left\{a_n\right\}$的前n项和，已知$a_1=2$，对任意$p,q\in\mathbf{N}^*$，都有$a_{p+q}=a_p+a_q$，则$f\left(n\right)=\frac{S_n+60}{n+1}(n\in\mathbf{N}^*)$的最小值为__________.

6、（2017.09 衡水金卷）已知数列$\{a_n\}$与$\{b_n\}$的前n项和分别为S_n，T_n，且$a_n>0$，

$6S_n=a_n^2+3a,n\in N^*$，$b_n=\dfrac{2^{a_n}}{(2^{a_n}-1)(2^{a_{n+1}}-1)}$，若$\forall n\in N^*,k>T_n$恒成立，则$k$的最小值是(　　)

（A）$\dfrac{1}{7}$　　（B）$\dfrac{1}{49}$　　（C） 49　　（D）$\dfrac{8}{441}$

7、（2017.12 上海松江区一调）已知数列$\left\{a_n\right\}$的通项公式为$a_n=2q^n+q(q<0,n\in N^*)$，

若对任意$m,n\in N^*$都有$\dfrac{a_m}{a_n}\in(\dfrac{1}{6},6)$，则实数$q$的取值范围为__________

8、（2017.03 安徽安庆二模）已知数列$\{a_n\}$是各项均不为零的等差数列，S_n为其前n项和，且$S_{2n-1}=a_n^2(n\in N^*)$，若不等式$\dfrac{1}{a_1a_2}+\dfrac{1}{a_2a_3}+...+\dfrac{1}{a_na_{n+1}}<n\log_{\frac{1}{8}}\lambda$对任意$n\in N^*$恒成立，则实数$\lambda$的最大值是__________

9、（2017.12 上海徐汇区一调）若不等式$(-1)^n\cdot a<3+\dfrac{(-1)^{n+1}}{n+1}$对任意正整数$n$恒成立，则实数$a$的取值范围是______.

10、（2017.03 厦门一测）已知数列$\left\{a_n\right\}$的前n项和为S_n，直线$y=x-2\sqrt{2}$与圆$x^2+y^2=2a_n+2$交于A_n，B_n（$n\in N^*$）两点，且$S_n=\dfrac{1}{4}\left|A_nB_n\right|^2$．若$a_1+2a_2+3a_3+\cdots+na_n<\lambda a_n^2+2$对任意$n\in N^*$恒成立，则实数$\lambda$的取值范围是（　　）

（A）$(0,+\infty)$　　（B）$(\dfrac{1}{2},+\infty)$　　（C）$[0,+\infty)$　　（D）$[\dfrac{1}{2},+\infty)$

11、（2017.12 化州二模）已知有穷数列$\{a_n\}$中，$n=1,2,3,\cdots,729$，且$a_n=(2n-1)(-1)^{n+1}$，从数列$\{a_n\}$中依次取出$a_2,a_5,a_{14},\cdots$构成新数列$\{b_n\}$，容易发现数列$\{b_n\}$是以-3为首项，-3为公比的等比数列，记数列$\{a_n\}$的所有项的和为S，数列$\{b_n\}$的所有项的和为T，则（　　）

A．$S>T$　　B．$S=T$　　C．$S<T$　　D．S与T的大小关系不确定

12、（2017.04 福建质检）已知数列$\left\{a_n\right\}$的前项和$S_n=2a_n-1$．$\left\{b_n\right\}$是公差不为 0 的等差数列，其前三项和为 3，且b_3是b_2,b_5的等比中项.

（Ⅰ）求a_n,b_n；

（Ⅱ）若$a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n\geq\left(n-2\right)t+2$，求实数$t$的取值范围

4.3 奇偶（性）并项

例：数列$\left\{a_n\right\}$满足$a_1=1, a_{n+1}+a_n=2n$，则$a_{2017}=$_________

1、（2017 重庆二诊）已知数列$\left\{a_n\right\}$的前项和为S_n，若$a_1=1$，$a_{2n}=n-a_n$，$a_{2n+1}=a_n+1$，则$S_{100}=$__________.（用数字作答）

2、（2012 全国 I 卷理）数列$\{a_n\}$满足$a_{n+1}+(-1)a_n=2n-1$，则$\{a_n\}$的前 60 项和为__________

3、（2017. 03 东三省一模）已知数列$\{a_n\}$的前项和为S_n，$a_n+a_{n+1}=n\cdot(-1)^{\frac{n(n+1)}{2}}$，$S_{2017}=1008$，则$a_2$的值为________

4、（2017 黑龙江哈师大附中三模）已知数列$\left\{a_n\right\}$满足$a_n=\left(n^2+4n\right)\cos n\pi$，则$\left\{a_n\right\}$的前 50 项的和为______

5、（2017.05 福建三明质检）已知函数$f\left(n\right)=n^2\cos\left(n\pi\right)$，数列$\left\{a_n\right\}$满足$a_n=f\left(n\right)+f\left(n+1\right)\left(n\in N^+\right)$，则$a_1+a_2+\cdots a_{2n}=$__________

6、（2017.05 福建三明质检）已知数列$\left\{a_n\right\}$的前项和为S_n，且$a_1=1$，$a_{n+1}\cdot a_n=2^n\left(n\in N^*\right)$，则$S_{2016}=$（　）

（A）$3\cdot 2^{1008}-3$　　（B）$2^{2016}-1$　　（C）$2^{2009}-3$　　（D）$2^{2008}-3$

7、已知数列$\{a_n\}$的通项公式为$a_n=\begin{cases}n^2\left(n为正奇数\right)\\-n^2\left(n为正偶数\right)\end{cases}$，求其前$n$项和$S_n$

4.4 周期性

例：已知数列$\left\{a_n\right\}$满足$a_1=1,a_2=2,a_{n-1}a_na_{n+1}=a_{n-1}+a_n+a_{n+1}\left(n\ge 2,n\in N^*\right)$，且对于$\forall n\in N^*,a_na_{n+1}\ne 1$，设$\left\{a_n\right\}$的前$n$项和为$S_n$，则$S_{2018}=$_________

1、**（2017.03 黄冈调研）**已知数列$\left\{x_n\right\}$满足$x_{n+2}=|x_{n+1}-x_n|$（$n\in N^*$），若$x_1=1$，$x_2=a$（$a\le 1$，$a\ne 0$），且$x_{n+3}=x_n$对于任意正整数n均成立，则数列$\left\{x_n\right\}$的前 2015 项和S_{2015}的值为（　　）

（A）672　　（B）673　　（C）1342　　（D）1344

2、**（2017.07 珠海一中期末考）**多个数求和用符号Σ表示，多个数求乘积可以用符号Π表示，如$\prod_{i=1}^{n}x_i=x_1x_2x_3\cdots x_i$，若数列$\left\{a_n\right\}$满足$a_1=2$，$a_{n+1}=\dfrac{1+a_n}{1-a_n}(n\in N^*)$，则$\prod_{i=1}^{2017}a_i$的值为_________.

3、**（2017 郑州二模）**已知数列$\{a_n\}$满足$a_{n+1}=a_n-a_{n-1}$（$n\ge 2$），$a_1=m$，$a_2=n$，S_n为数列$\left\{a_n\right\}$的前n 项和，则S_{2017}的值为（　　）

（A）$2017n-m$　　（B）$n-2017m$　　（C）m　　（D）n

4、数列$\{a_n\}$中，已知$a_1=1,a_2=2,a_{n+1}=a_n+a_{n+2}(n\in N^*)$，则$a_{2018}=$___________

5、已知数列$\{a_n\}$满足条件：$a_1=\dfrac{1}{2}$，$a_{n+1}=\dfrac{1+a_n}{1-a_n}$，，则对$n\le 20$的正整数，$a_n+a_{n+1}=\dfrac{1}{6}$的概率为___________

6、已知实数列$\{a_n\}$满足$a_1=a$（a为实数），$a_n=\dfrac{\sqrt{3}a_{n-1}+1}{\sqrt{3}-a_{n-1}}$（$n\in N^+$），求$a_{2018}$

第 5 讲　简单的数列与不等式证明

【高考真题】

（**2014 广东文**）设各项均为正数的数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n，且 S_n 满足 $S_n^2-(n^2+n-3)S_n-3(n^2+n)=0,n\in N^*$

（Ⅰ）求 a_1 的值

（Ⅱ）求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式

（Ⅲ）证明：对一切正整数 n，有 $\frac{1}{a_1(a_1+1)}+\frac{1}{a_2(a_2+1)}+\ldots+\frac{1}{a_n(a_n+1)}<\frac{1}{3}$

（**2011 全国理**）设数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1=0$ 且 $\frac{1}{1-a_{n+1}}-\frac{1}{1-a_n}=1$

（Ⅰ）求 $\{a_n\}$ 的通项公式

（Ⅱ）设 $b_n=\frac{1-\sqrt{a_{n+1}}}{\sqrt{n}}$，记 $S_n=\sum\limits_{k=1}^{n}b_k$，证明：$S_n<1$

（**2006 全国理**）设数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和 $S_n=\frac{4}{3}a_n-\frac{1}{3}\times 2^{n-1}+\frac{2}{3},n=1,2,3,\ldots$

（Ⅰ）求首项 a_1 与通项 a_n

（Ⅱ）设 $T_n=\frac{2^n}{S_n},n=1,2,3\ldots$，证明：$\sum\limits_{i=1}^{n}T_i<\frac{3}{2}$

（2017.12 洛阳一模） 已知各项不为 0 的数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n，且满足 $a_1 = 4, a_{n+1} = 3S_n + 4(n \in N^*)$

（Ⅰ）求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式

（Ⅱ）设数列 $\{b_n\}$ 满足 $a_n b_n = \log_2 a_n$，数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和为 T_n，求证：$T_n < \frac{8}{9}$

（2017.08 广东七校一联） 设公差不为零的等差数列 $\left\{a_n\right\}$ 的前 5 项的和为 55，且 a_2，$\sqrt{a_6 + a_7}$，$a_4 - 9$ 成等比数列

（Ⅰ）求数列 $\left\{a_n\right\}$ 的通项公式.

（Ⅱ）设 $b_n = \frac{1}{(a_n - 6)(a_n - 4)}$，数列 $\left\{b_n\right\}$ 的前 n 项和为 S_n，求证：$S_n < \frac{1}{2}$.

（2017.04 重庆二诊） 已知等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n，$a_4 = 9$，$S_3 = 15$.

（Ⅰ）求 S_n

（Ⅱ）设数列 $\{\frac{1}{S_n}\}$ 的前 n 项和为 T_n，证明：$T_n < \frac{3}{4}$

第 6 讲 存在性问题（整除问题）

例：已知数列$\left\{a_n\right\}$的通项公式为$a_n=2n-7$，若$\dfrac{a_m a_{m+1}}{a_{m+2}}$为数列$\left\{a_n\right\}$中的项，则$m=$____

1、（**2017.09 珠海摸底理**）已知数列$\left\{a_n\right\}$满足$a_n=\dfrac{2n+4}{3}$，若从$\left\{a_n\right\}$中提取一个公比为q的等比数列$\left\{a_{k_n}\right\}$，其中$k_1=1,$且$k_1<k_2<\ldots<k_n,k_n\in N^*$，则满足条件的最小$q$的值为__

2、（**2017.08 广东七校联考**）已知$\left\{a_n\right\}$是递增数列，其前n项和为S_n，$a_1>1$，且$10S_n=(2a_n+1)(a_n+2)$，$n\in\mathbf{N}^*$.

（Ⅰ）求数列$\left\{a_n\right\}$的通项a_n；

（Ⅱ）是否存在$m,\ n,\ k\in\mathbf{N}^*$，使得$2(a_m+a_n)=a_k$成立？若存在，写出一组符合条件的m,n,k的值；若不存在，请说明理由；

3、（**2014 湖北**）已知等差数列$\left\{a_n\right\}$满足：$a_1=2$，且a_1,a_2,a_5成等比数列

（Ⅰ）求数列$\left\{a_n\right\}$的通项公式

（Ⅱ）记数列$\left\{a_n\right\}$的前n项和为S_n，是否存在正整数n，使得$S_n>60n+800$？若存在，求n的最小值；若不存在，说明理由

4、已知数列$\left\{a_n\right\}$是各项均不为 0 的等差数列，S_n是其前n项和，且满足$a_n^2=S_{2n-1}$，令$b_n=\dfrac{1}{a_n a_{n+1}}$，数列$\left\{b_n\right\}$的前$n$项和为$T_n$

（Ⅰ）求数列$\left\{a_n\right\}$的通项公式及T_n

（Ⅱ）是否存在正整数$m,n\left(1<m<n\right)$，使得T_1,T_m,T_n成等比数列？若存在，求出所有的m,n的值；若不存在，请说明理由。

5、（2017.12 上海长宁一调）已知数列$\{a_n\}$满足：$a_1=1$，$\frac{1}{a_{n+1}}=\sqrt{\frac{1}{a_n^2}+4}$，$n\in\mathbf{N}^*$.

（Ⅰ）求数列$\{a_n\}$的通项公式

（Ⅱ）设数列$\{b_n\}$的前n项和为S_n，且满足$\frac{S_{n+1}}{a_n^2}=\frac{S_n}{a_{n+1}^2}+16n^2-8n-3$，试确定$b_1$的值，使得数列$\{b_n\}$为等差数列

6、（2017.12 上海金山区一调）若数列$\{a_n\}$中存在三项，按一定次序排列构成等比数列，则称$\{a_n\}$为“等比源数列”.

（Ⅰ）已知数列$\{a_n\}$中，$a_1=2,a_{n+1}=2a_n-1$，求数列$\{a_n\}$的通项公式；

（Ⅱ）在（Ⅰ）的结论下，试判断数列$\{a_n\}$是否为“等比源数列”，并证明你的结论

7、（2016.12 无锡辅仁高中月测）

已知数列$\{a_n\},\{b_n\}$满足$a_1=3,a_nb_n=2,b_{n+1}=a_n\left(b_n-\frac{2}{1+a_n}\right),n\in N^*$

（Ⅰ）求证：数列$\{\frac{1}{b_n}\}$是等差数列，并求数列$\{b_n\}$的通项公式

（Ⅱ）设数列$\{c_n\}$满足$c_n=2a_n-5$，对于任意给定的正整数p，是否存在正整数$q,r\left(p<q<r\right)$，使得$\frac{1}{c_p},\frac{1}{c_q},\frac{1}{c_r}$成等差数列？若存在，试用$p$表示$q,r$；若不存在，请说明理由

第 7 讲 创新型数列问题

例：设数列$\left\{a_n\right\}$中，$a_1=2,a_{n+1}=\dfrac{2}{a_n+1},b_n=\left|\dfrac{a_n+2}{a_n-1}\right|,n\in N^*$，则数列$\left\{b_n\right\}$的通项公式为

$b_n=$_______

1、（2017.04 重庆二诊）（数学文化）《张丘建算经》是我国古代内容极为丰富的数学名著，书中有如下问题："今有女不善织，日减功迟，初日织五尺，末日织一尺，今共织九十尺，问织几日？"，已知"日减功迟"的具体含义是每天比前一天少织同样多的布，则此问题的答案是（　　）

（A）10 日　　（B） 20 日　　（C）30 日　　（D）40 日

2、（2017 衡水一调）已知数列$\left\{a_n\right\}$是等差数列，数列$\left\{b_n\right\}$是等比数列，对一切$n\in N^+$，都有$\dfrac{a_{n+1}}{a_n}=b_n$，则数列$\left\{b_n\right\}$的通项公式为__________

3、（2017.12 上海徐汇区一调）著名的斐波那契数列$\left\{a_n\right\}:1,1,2,3,5,8,\cdots$，满足$a_1=a_2=1,a_{n+2}=a_{n+1}+a_n\left(n\in N^*\right)$，那么$1+a_3+a_5+a_7+a_9+\cdots+a_{2017}$是斐波那契数列中的第___________项

4、（2017.10 河南天一联二测）已知数列$\left\{a_n\right\}$满足$a_1=-1,a_{n+1}=\left|1-a_n\right|+2a_n+1$，其前$n$项和为$S_n$，则下列说法正确的个数为（　　）

①数列$\left\{a_n\right\}$为等差数列；②$a_n=3^{n-2}$；③$S_n=\dfrac{3^{n-1}-3}{2}$.

（A）0　　（B） 1　　（C）2　　（D）3

5、（2017 湖南娄底二模）已知各项都为整数的数列$\left\{a_n\right\}$中，$a_1=2$，且对任意的$n\in \mathrm{N}^*$，满足$a_{n+1}-a_n\le 2^n+\dfrac{1}{2}$，$a_{n+2}-a_n\ge 3\times 2^n-1$，则$a_{2017}=$__________

6、（2016 长沙一中月考八）用 $g(n)$ 表示自然数 n 的所有因数中最大的那个奇数，例：9 的因数有 1，3，9，$g(9)=9$，10 的因数有 1，2，5，10，$g(10)=5$，那么 $g(1)+g(2)+g(3)+\cdots+g(2^{2016}-1)=$________

（A）$\frac{4}{3}\times 4^{2015}+\frac{1}{3}$　（B）$\frac{4}{3}\times 4^{2015}-\frac{1}{3}$　（C）$\frac{4}{3}\times 4^{2016}+\frac{1}{3}$　（D）$\frac{4}{3}\times 4^{2016}-\frac{1}{3}$

7、（2017 长沙一中月考五）数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1=\frac{1}{3}$，对任意 $n\in N^*$，$a_{n+1}={a_n}^2+a_n$，则 $\sum_{n=1}^{2016}\frac{1}{a_n+1}$ 的整数部分是__________

8、（2017.04 深圳二调）若数列 $\{a_n\},\{b_n\}$ 满足 $a_1=b_1=1$，$b_{n+1}=-a_n$，$a_{n+1}=3a_n+2b_n$，$n\in N^*$.则 $a_{2017}-a_{2016}=$_______

9、对于数列 $\{a_n\}$，如果对任意正整数 n，总有不等式：$\frac{a_n+a_{n+2}}{2}\le a_{n+1}$ 成立，则称数列 $\{a_n\}$ 为向上凸数列（简称上凸数列）．现有数列 $\{a_n\}$ 满足如下两个条件：

（1）数列 $\{a_n\}$ 为上凸数列，且 $a_1=1, a_{10}=28$；

（2）对正整数 n（$1\le n<10, n\in N^*$），都有 $|a_n-b_n|\le 20$，其中 $b_n=n^2-6n+10$．

则数列 $\{a_n\}$ 中的第五项 a_5 的取值范围为________.

第 8 讲 数阵问题（数列群问题）

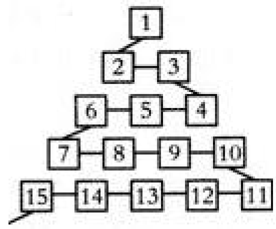
例：把等差数列$\{a_n\}$依次按第一个括号一个数，第二个括号两个数，第三个括号三个数，第四个括号一个数……，循环分为$(1),(3,5),(7,9,11),(13),(15,17),(19,21,23),(25),\cdots$，则第$50$个括号内各数之和为（　　）

（A）390　　　　（B）392　　　　（C）394　　　　（D）396

1、（2017 全国Ⅰ卷理 12）几位大学生响应国家的创业号召，开发了一款应用软件，为激发大家学习数学的兴趣，他们推出了“解数学题获取软件激活码”的活动，这款软件的激活码为下面数学问题的答案：已知数列$1，1，2，1，2，4，1，2，4，8，1，2，4，8，16，\cdots$，其中第一项是$2^0$，接下来的两项是$2^0$，$2^1$，在接下来的三项式$2^6$，$2^1$，$2^2$，依次类推，求满足如下条件的最小整数$N$：$N>100$且该数列的前$N$项和为$2$的整数幂．那么该款软件的激活码是（　　）

（A）440　　　　（B）330　　　　（C）220　　　　（D）110

2、（2017.09 衡水摸底）如图是网格工作者经常用来解释网络运作的蛇形模型：数字 1 出现在第 1 行；数字 2，3 出现在第 2 行；数字 6，5，4（从左至右）出现在第 3 行；数字 7，8，9，10 出现在第 4 行；依此类推，则第 20 行从左至右算第 4 个数字为_______.



3、（2017 安徽马鞍山二模）如图所示的“数阵”的特点是：每行每列都成等差数列，则数字 73 在图中出现的次数为_______

2	3	4	5	6	7	…
3	5	7	9	11	13	…
4	7	10	13	16	19	…
5	9	13	17	21	25	…
6	11	16	21	26	31	…
7	13	19	25	31	37	…
…	…	…	…	…	…	…

4、（2017.03 湖北八校二联）记$f(n)$为最接近$\sqrt{n}(n\in N^*)$的整数，如：$f(1)=1$，$f(2)=1$，$f(3)=2$，$f(4)=2$，$f(5)=2$，......，若$\dfrac{1}{f(1)}+\dfrac{1}{f(2)}+\dfrac{1}{f(3)}+...+\dfrac{1}{f(m)}=4034$，则正整数$m$的值为（　　）

（A）2016×2017　　　　（B）2017^2

（C）2017×2018　　　　（D）2018×2019

第 9 讲 数列与其他知识点综合

1、**（2017.12 上海杨浦区一调）**数列$\{a_n\}$的前 n 项和为 S_n，若点(n,S_n)（$n\in N^*$）在函数 $y=\log_2(x+1)$ 的反函数的图像上，则 $a_n=$________

2、**（2017.12 上海杨浦区一调）**在ΔABC中，若$\sin A$，$\sin B$，$\sin C$ 成等比数列，则角 B 的最大值为__________

3、**（2017.12 上海崇明区一模）**已知等差数列$\{a_n\}$的公差为 d，前 n 项和为 S_n，则“$d>0$”是“$S_4+S_6>2S_5$”的（　　）

（A）充分不必要条件　　　　（B）必要不充分条件

（C）充分必要条件　　　　（D）既不充分也不必要条件

4、**（2016.09 珠海摸底）**已知函数 $f(x)=x^2+bx$ 的图象在点 $A(1,f(1))$ 处的切线 l 与直线 $3x-y+2=0$ 平行，若数列$\left\{\dfrac{1}{f(n)}\right\}$的前 n 项和为 S_n，则 S_{2015} 的值为（　　）

A. $\dfrac{2014}{2015}$　　B. $\dfrac{2012}{2013}$　　C. $\dfrac{2013}{2014}$　　D. $\dfrac{2015}{2016}$

5、**（2017 内蒙包头十校联考）**已知各项均为正数的等比数列$\{a_n\}$满足 $a_2=a_6+2a_5$，若存在两项 a_m,a_n，使得 $\sqrt{a_m a_n}=4a_1$，则 $\dfrac{1}{m}+\dfrac{4}{n}$ 的最小值为__________

6、**（2017.12 青浦区一调）**已知 S_n 为数列$\{a_n\}$的前 n 项和，$a_1=a_2=1$，平面内三个不共线的向量$\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB},\overrightarrow{OC}$，满足$\overrightarrow{OC}=(a_{n-1}+a_{n+1})\overrightarrow{OA}+(1-a_n)\overrightarrow{OB},n\geq 2.n\in\mathbf{N}^*$，若 A,B,C 在同一直线上，则 $S_{2018}=$__________

7、**（2017.12 上海虹口区一模）**在ΔABC中，D 是 BC 的中点，点列 P_n $(n\in N^*)$ 在直线 AC 上，且满足$\overrightarrow{P_nA}=a_{n+1}\cdot\overrightarrow{P_nB}+a_n\cdot\overrightarrow{P_nD}$，若 $a_1=1$，则数列$\{a_n\}$的通项公式 $a_n=$______

8、（2017.08 安徽六校一联）已知函数 $f(x)=\sin x-\cos x$，$x\in[0,+\infty)$，直线 l 过原点且与曲线 $y=f(x)$ 相切，其切点的横坐标从小到大依次排列为 $x_1,x_2,x_3,\cdots,x_n,\cdots$，则下列说法正确的是（　　）

（A）$|f(x_n)|=1$　　　　（B）数列 $\{x_n\}$ 为等差数列

（C）$x_n=\tan(x_n+\dfrac{\pi}{4})$　　　　（D）$[f(x_n)]^2=\dfrac{2x_n^{\ 2}}{x_n^{\ 2}+1}$

9、（2017.04 江西八校联考）已知 $f(x)$ 是 R 上可导的增函数，$g(x)$ 是 R 上可导的奇函数，对 $\forall x_1,x_2\in R$ 都有 $\left|g(x_1)+g(x_2)\right|\geq\left|f(x_1)+f(x_2)\right|$ 成立，等差数列 $\left\{a_n\right\}$ 的前 n 项和为 S_n，$f(x)$ 同时满足下列两件条件：$f(a_2-1)=1$，$f(a_9-1)=-1$，则 S_{10} 的值为______

10、（2017.12 上海宝山区一调）若 $n(n\geq 3,n\in N^*)$ 个不同的点 $Q_1(a_1,b_1),Q_2(a_2,b_2),...,Q_n(a_n,b_n)$ 满足：$a_1<a_2<...<a_n$，则称点 $Q_1,Q_2,...,Q_n$ 按横序排列．设四个实数 k,x_1,x_2,x_3 使得 $2k(x_3-x_1),x_3^2,2x_2^2$ 成等差数列，且两函数 $y=x^2,y=\dfrac{1}{x}+3$ 图象的所有交点 $P_1(x_1,y_1),P_2(x_2,y_2),P_3(x_3,y_3)$ 按横序排列，则实数 k 的值为_________

第 10 讲（extra）放缩法证明数列求和不等式

题型一、先放缩再裂项类型

（1）$a_n=\dfrac{1}{n^2}$ 的放缩

$$a_n=\frac{1}{n^2}<\text{类型放缩}\begin{cases}(1)\dfrac{1}{n^2}<\dfrac{1}{n^2-1}\Rightarrow S_n< \\ (2)\dfrac{1}{n^2}<\dfrac{1}{n^2-\frac{1}{4}}\Rightarrow S_n< \\ (3)\dfrac{1}{n^2}<\dfrac{1}{n^2-n}\Rightarrow S_n< \\ (4)\dfrac{1}{n^2}<\dfrac{1}{n^2-2n}\Rightarrow S_n< \\ (5)\dfrac{1}{n^2}=\dfrac{4}{4n^2}<\dfrac{4}{4n^2-1}\Rightarrow S_n<\end{cases}$$

$$a_n=\frac{1}{n^2}>\text{类型放缩}\begin{cases}(1)\dfrac{1}{n^2}>\dfrac{1}{n^2+n}\Rightarrow S_n> \\ (2)\dfrac{1}{n^2}>\dfrac{1}{n^2+2n}\Rightarrow S_n> \\ (3)\dfrac{1}{n^2}>\dfrac{1}{n^2+3n+2}\Rightarrow S_n<\end{cases}$$

（2） $a_n = \dfrac{1}{n^3}$ **的放缩**

$$a_n = \frac{1}{n^3} = \frac{1}{n \cdot n^2} < \frac{1}{n(n^2-1)} = \frac{1}{(n-1)\cdot n \cdot (n+1)} = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{(n-1)\cdot n} - \frac{1}{n\cdot(n+1)}\right] \Rightarrow S_n <$$

（3） $a_n = \dfrac{1}{\sqrt{n}}$ **的放缩**

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{n}}\begin{cases}(1)\dfrac{1}{\sqrt{n}} = \dfrac{2}{2\sqrt{n}} = \dfrac{2}{\sqrt{n}+\sqrt{n}} < \dfrac{2}{\sqrt{n}+\sqrt{n-1}} = 2(\sqrt{n}-\sqrt{n-1}) \Rightarrow S_n < \\ \\ (2)\dfrac{1}{\sqrt{n}} = \dfrac{2}{2\sqrt{n}} = \dfrac{2}{\sqrt{n}+\sqrt{n}} > \dfrac{2}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}} = 2(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}) \Rightarrow S_n >\end{cases}$$

（4） $\dfrac{2^n}{(2^n-1)^2} = \dfrac{2^n}{(2^n-1)(2^n-1)} < \dfrac{2^n}{(2^n-1)(2^n-2)} = \dfrac{2^{n-1}}{(2^n-1)(2^{n-1}-1)} = \dfrac{1}{2^{n-1}-1} - \dfrac{1}{2^n-1} \Rightarrow S_n <$

题型二、直接裂项但是不好裂的类型

（1） $a_n = \dfrac{n+1}{n+2} + \dfrac{n+2}{n+1} =$ ____________ = ______________

（2） $\dfrac{(2n)^2}{(2n-1)(2n+1)} =$ ____________________ **（3）** $\dfrac{2n+1}{n^2\cdot(n+1)^2} =$ ____________________

（4） $\dfrac{2^n}{(2^{n+1}-1)\cdot(2^n-1)} =$ ____________________

（5） $(\dfrac{2}{2n+1} - \dfrac{1}{2n+3})\cdot\dfrac{1}{2^n} =$ _________________ **（6）** $\dfrac{n}{(n+1)!} =$ ____________________

题型三、放缩成等比数列类型

（1） $a_n = \dfrac{1}{3^n - 2^n} <$ ____________ **（2）** $a_n = \dfrac{1}{3^n - 2^n} <$ ____________

例 1、（2015 珠海一模）已知数列$\{a_n\}$的前n项和为S_n，且$S_n=\frac{1}{2}n\cdot a_{n+1},n\in N^*$，其中$a_1=1$

（I）求数列$\{a_n\}$的通项公式；

（II）若$b_n=\frac{1}{3^{a_{n+1}}-2}$，数列$\{b_n\}$的前$n$项和为$T_n$，求证：$T_n<\frac{1}{4}$。

例2、（2015广二模）已知点$P_n\left(a_n,b_n\right)\left(n\in \mathrm{N}^*\right)$在直线$l$：$y=3x+1$上，$P_1$是直线$l$与$y$轴的交点，数列$\{a_n\}$是公差为1的等差数列.

（I）求数列$\{a_n\}$，$\{b_n\}$的通项公式

（II）求证：$\frac{1}{\left|P_1P_2\right|^2}+\frac{1}{\left|P_1P_3\right|^2}+\cdots+\frac{1}{\left|P_1P_{n+1}\right|^2}<\frac{1}{6}$.

例 3、（2014 广东高考）

正数数列$\{a_n\}$前n项和为S_n，且$S^2{}_n-(n^2+n-3)S_n-3(n^2+n)=0,n\in N^*$

（Ⅰ）求a_1的值；

（Ⅱ）求数列$\{a_n\}$的通项公式；

（III）证明：对一切正整数n，有$\frac{1}{a_1(a_1+1)}+\frac{1}{a_2(a_2+1)}+\cdots+\frac{1}{a_n(a_n+1)}<\frac{1}{3}$。

例 3、（2013 广东高考）

设数列$\left\{a_n\right\}$的前n项和为S_n.已知$a_1=1$,$\dfrac{2S_n}{n}=a_{n+1}-\dfrac{1}{3}n^2-n-\dfrac{2}{3},n\in\mathbf{N}^*$.

（Ⅰ）求a_2的值;

（Ⅱ）求数列$\left\{a_n\right\}$的通项公式;

（Ⅲ）证明:对一切正整数n,有$\dfrac{1}{a_1}+\dfrac{1}{a_2}+\cdots+\dfrac{1}{a_n}<\dfrac{7}{4}$.

例 4:、（**2012 广东高考**）设数列$\{a_n\}$的前n项和为S_n，满足$2S_n=a_{n+1}-2^{n+1}+1$，$n\in N^*$，

且a_1,a_2+5,a_3成等差数列.

（Ⅰ）求a_1的值;

（Ⅱ）求数列$\{a_n\}$的通项公式;

（Ⅲ）证明：对一切正整数n，有$\dfrac{1}{a_1}+\dfrac{1}{a_2}+\cdots+\dfrac{1}{a_n}<\dfrac{3}{2}$.

进阶：

1、求证：$\frac{\ln 2}{2}+\frac{\ln 3}{3}+\frac{\ln 4}{4}+\cdots+\frac{\ln 3^n}{3^n}<3^n-\frac{5n+6}{6}(n\in N^*)$

2、求证:$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n+1}<\ln(n+1)<1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}$

3、求证:$(1+\frac{1}{2!})(1+\frac{1}{3!})\cdot\cdots\cdot(1+\frac{1}{n!})<e$

4、求证：$(1+\frac{1}{9})(1+\frac{1}{81})\cdot\cdots\cdot(1+\frac{1}{3^{2n}})<\sqrt{e}$

5、已知数列$\{a_n\}$满足$a_1=1,a_{n+1}=2a_n+1(n\in N^*)$.

（I）求数列$\{a_n\}$的通项公式；

（II）若数列$\{b_n\}$满足$4^{b_1-1}4^{b_2-1}\cdots4^{b_n-1}=(a_n+1)^{b_n}(n\in N^*)$，证明：数列$\{b_n\}$是等差数列；

（III）证明：$\frac{n}{2}-\frac{1}{3}<\frac{a_1}{a_2}+\frac{a_2}{a_3}+...+\frac{a_n}{a_{n+1}}<\frac{n}{2}(n\in N^*)$.

6、已知数列$\{a_n\}$满足：$a_1=1$，$a_{n+1}=(1+\frac{n}{2^n})a_n(n=1,2,3\cdots)$. 求证：$a_{n+1}>a_n\geq 3-\frac{n+1}{2^{n-1}}$