平面向量综合讲义

前　言 02

近七年全国Ⅰ卷高考真题 . . . 06

第 1 讲　数量积基础 07

1.1　平行（共线） 07

1.2　垂直 07

1.3　夹角 08

1.4　模长 09

1.5　投影 10

第 2 讲　平面向量基本定理 13

第 3 讲　最值（范围） 15

第 4 讲　等和线 18

第 5 讲　极化恒等式 20

第 6 讲　“五心问题”（奔驰定理） 22

第 7 讲　矩形的两个小性质 24

第 8 讲　向量与其他知识综合 25

第 9 讲　斜坐标系 26

前言

【高考命题规律】

年份	题号	题型	考查内容	思想方法	分值
2011 年	理 10	选择题	向量积与三角函数、不等式	模平方	5 分
	文 13	填空题	单位向量，向量垂直	方程思想	5 分
2012 年	理 13	填空题	向量模长，夹角	模平方	5 分
	文 15	填空题	向量模长，夹角	模平方	5 分
2013 年	理 13	填空题	向量垂直	方程思想	5 分
	文 13	填空题	向量垂直	方程思想	5 分
2014 年	理 15	填空题	三点共线	数形结合思想	5 分
	文 6	选择题	平面向量基本定理	数形结合思想	5 分
2015 年	理 7	选择题	平面向量基本定理	数形结合思想	5 分
	文 2	选择题	向量加减法	数形结合思想	5 分
2016 年	理 13	填空题	模运算	模平方	5 分
	文 13	填空题	垂直	方程思想	5 分
2017 年	理 13	填空题	模运算，平方	模平方	5 分
	文 13	填空题	垂直	方程思想	5 分

全国 I 卷向量主要以客观题形式出现，属于基础题，解决此类问题**一要准确记忆公式，二要准确运算**。主要考察内容为向量的向量积运算以及坐标运算，涉及到**模长问题牢记平方（后开方）**的思路，便能直捣黄龙，一举破题。另外，虽然这几年全国 I 卷平面向量不涉及到较难知识以及能力考查，但是备考方面还是应当适当提高训练训练难度，如建系解决棘手数量积问题等，至于等和线、奔驰定理、极化恒等式等进阶知识则因人因地因时制宜。

【基础知识】

一、向量的有关概念

1、向量:既有大小又有方向的量叫做向量.向量的大小叫向量的模(也就是用来表示向量的有向线段的长度).

2、向量的表示方法:

（1）字母表示法:如$\vec{a},\vec{b},\vec{c},\cdots$等.

（2）几何表示法:用一条有向线段表示向量. 如$\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CD}$等.

（3）坐标表示法:在平面直角坐标系中, 设向量$\overrightarrow{OA}$的起点O为在坐标原点, 终点A坐标为$\left(x,y\right)$, 则$\left(x,y\right)$称为$\overrightarrow{OA}$的坐标, 记为$\overrightarrow{OA}=\left(x,y\right)$.

注:向量既有代数特征, 又有几何特征, 它是数形兼备的好工具.

3、相等向量:长度相等且方向相同的向量.向量可以自由平移,平移前后的向量相等.两向量$\vec{a}$与$\vec{b}$相等,记为$\vec{a}=\vec{b}$.

注:向量不能比较大小

4、零向量:长度为零的向量叫零向量.零向量只有一个,其方向是任意的.

5、单位向量:长度等于 1 个单位的向量.单位向量有无数个,每一个方向都有一个单位向量.

6、共线（平行）向量:方向相同或相反的非零向量,叫共线向量. 任一组共线向量都可以移到同一直线上.

规定:$\vec{0}$与任一向量共线..

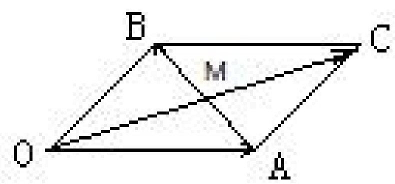
7、相反向量: 长度相等且方向相反的向量.

二、向量的运算

1、三角形法则与平行四边形法则

$\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OC}$,　$\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{AB}$

注：$\left|\vec{a}\right|-\left|\vec{b}\right|\le\left|\vec{a}+\vec{b}\right|\le\left|\vec{a}\right|+\left|\vec{b}\right|$



2、数乘运算

（1）规定：实数λ与向量$\vec{a}$的积是一个向量，这种运算叫做向量的数乘.记作：$\lambda\vec{a}$

（2）平面向量共线定理：向量$\vec{a}(\vec{a}\neq 0)$与$\vec{b}$共线，当且仅当有唯一一个实数λ，使$\vec{b}=\lambda\vec{a}$.

3、平面向量数量积

（1）$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta$　　（2）$\vec{a}$在$\vec{b}$方向上的投影为：$|\vec{a}|\cos\theta$

（3）$\vec{a}^2=|\vec{a}|^2 \Leftrightarrow |\vec{a}|=\sqrt{\vec{a}^2}$

向量夹角的确定：向量$\vec{a},\vec{b}$的夹角θ指的是将$\vec{a},\vec{b}$的起点重合所成的角，$\theta\in[0,\pi]$

4、平面向量基本定理

如果$\overrightarrow{e_1},\overrightarrow{e_2}$是同一平面内的两个不共线向量，那么对于这一平面内任一向量$\vec{a}$，有且只有一对实数λ_1,λ_2，使$\vec{a}=\lambda_1\overrightarrow{e_1}+\lambda_2\overrightarrow{e_2}$

（1）不共线的向量即可作为一组基底表示所有的向量

（2）唯一性：若$\vec{a}=\lambda_1\overrightarrow{e_1}+\lambda_2\overrightarrow{e_2}$且$\vec{a}=\mu_1\overrightarrow{e_1}+\mu_2\overrightarrow{e_2}$，则$\begin{cases}\lambda_1=\mu_1\\ \lambda_2=\mu_2\end{cases}$

5、平面向量的坐标运算

（1）设$\vec{a}=(x_1,y_1),\vec{b}=(x_2,y_2)$，则：

$$\vec{a}+\vec{b}=(x_1+x_2,y_1+y_2)\qquad \vec{a}-\vec{b}=(x_1-x_2,y_1-y_2)$$

$$\lambda\vec{a}=(\lambda x_1,\lambda y_1)\qquad \vec{a}//\vec{b}\Leftrightarrow\vec{a}=\lambda\vec{b}\Leftrightarrow x_1y_2-x_2y_1=0$$

$$\vec{a}\perp\vec{b}\Leftrightarrow\vec{a}\cdot\vec{b}=0\Leftrightarrow x_1x_2+y_1y_2=0\qquad \cos\theta=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}=\frac{x_1x_2+y_1y_2}{\sqrt{x_1^2+y_1^2}\cdot\sqrt{x_2^2+y_2^2}}$$

（2）设$A(x_1,y_1),B(x_2,y_2)$，则：

$$\overrightarrow{AB}=(x_2-x_1,y_2-y_1)\qquad |\overrightarrow{AB}|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$$

在处理向量数量积问题时，若几何图形特殊（如正方形，等边三角形等），易于建系并写出点的坐标，则考虑将向量坐标化，一旦所求向量用坐标表示，其数量积等问题迎刃而解。

常见的可考虑建系的图形：

（1）具备对称性质的图形：长方形，正方形，等边三角形，圆形

（2）带有直角的图形：直角梯形，直角三角形

（3）具备特殊角度的图形（$30^\circ,45^\circ,60^\circ,120^\circ$ 等）

6、模长

（1）有关模长的不等问题：通常考虑利用“模长平方”或“坐标化”得到模长与某个变量间的函数关系，从而将问题转化为求函数最值问题

（2）利用几何法求模长的条件：条件中的向量运算可构成特殊的几何图形，且所求向量与几何图形中的某条线段相关，则可考虑利用条件中的几何知识处理模长

7、线段定比分点

（1）$\overrightarrow{P_1P_2}$ 定比分点坐标公式:

设 $P_1(x_1,y_1)$、$P_2(x_2,y_2)$、$P(x,y)$，$\overrightarrow{P_1P}=\lambda\overrightarrow{PP_2}$

则：$\begin{cases} x=\dfrac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda} \\ y=\dfrac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda} \end{cases}$ $(\lambda\neq -1)$,特殊地，当$\lambda=1$ 时 得中点坐标公式：$\begin{cases} x=\dfrac{x_1+x_2}{2} \\ y=\dfrac{y_1+y_2}{2} \end{cases}$

另外，注意一下定比分点的向量公式：

O 为平面内任意一点，$\overrightarrow{P_1P}=\lambda\overrightarrow{PP_2}$，则 $\overrightarrow{OP}=\dfrac{\overrightarrow{OP_1}+\lambda\overrightarrow{OP_2}}{1+\lambda}(\lambda\neq -1)$.

（2）三角形重心公式及推导（见课本例 2）：

三角形重心公式：$(\dfrac{x_1+x_2+x_3}{3},\dfrac{y_1+y_2+y_3}{3})$

8、点的平移公式

平移前的点为 $P(x,y)$（原坐标），平移后的对应点为 $P'(x',y')$（新坐标），平移向量为 $\overrightarrow{PP'}=(h,k)$，　则 $\begin{cases} x'=x+h \\ y'=y+k. \end{cases}$，从而函数 $y=f(x)$ 的图像按向量 $\vec{a}=(h,k)$ 平移后的图像的解析式为 $y-k=f(x-h)$.

【近七年全国Ⅰ卷真题】

（2017 理 13）已知向量$\vec{a},\vec{b}$的夹角为60°，$|\vec{a}|=2,|\vec{b}|=1$则$|\vec{a}+2\vec{b}|=$__________

（2017 文 13）已知向量$\vec{a}=(-1,2),\vec{b}=(m,1)$，若向量$\vec{a}+\vec{b}$与$\vec{a}$垂直，则$m=$______

（2016 理 13）设向量$\vec{a}=(m,1),\vec{b}=(1,2)$且$|\vec{a}+\vec{b}|^2=|\vec{a}|^2+|\vec{b}|^2$，则$m=$______

（2016 文 13）设向量$\vec{a}=(x,x+1),\vec{b}=(1,2)$，且$\vec{a}\perp\vec{b}$，则$x=$_____

（2015 理 7）设D为ΔABC所在平面内一点$\overrightarrow{BC}=3\overrightarrow{CD}$，则（　　）

（A）$\overrightarrow{AD}=-\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{4}{3}\overrightarrow{AC}$　　（B）$\overrightarrow{AD}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}-\frac{4}{3}\overrightarrow{AC}$

（C）$\overrightarrow{AD}=\frac{4}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$　　（D）$\overrightarrow{AD}=\frac{4}{3}\overrightarrow{AB}-\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$

（2015 文 2）已知点$A(0,1),B(3,2)$，向量$\overrightarrow{AC}=(-4,-3)$，则向量$\overrightarrow{BC}=$（　）

（A）$(-7,-4)$　（B）$(7,4)$　（C）$(-1,4)$　（D）$(1,4)$

（2014 理 15）已知A,B,C是圆O上的三点，若$\overrightarrow{AO}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})$，则$\overrightarrow{AB}$与$\overrightarrow{AC}$的夹角为______

（2014 文 6）设D,E,F分别为ΔABC的三边BC,CA,AB的中点，则$\overrightarrow{EB}+\overrightarrow{FC}=$（　　）

（A）AD　（B）$\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}$　（C）$\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$　（D）$\overrightarrow{BC}$

（2013 文理 13）已知两个单位向量$\vec{a},\vec{b}$的夹角为60°，$\vec{c}=t\vec{a}+(1-t)\vec{b}$，若$\vec{b}\cdot\vec{c}=0$，则$t=$_______

（2012 文理 15，13）已知向量$\vec{a},\vec{b}$夹角为 45°，且$|\vec{a}|=1$，$|2\vec{a}-\vec{b}|=\sqrt{10}$，则$|\vec{b}|=$_________

（2011 理 10）已知$\vec{a}$与$\vec{b}$均为单位向量，其夹角为θ，有下列四个命题

$P_1:|\vec{a}+\vec{b}|>1\Leftrightarrow\theta\in[0,\frac{2\pi}{3})$　　$P_2:|\vec{a}+\vec{b}|>1\Leftrightarrow\theta\in(\frac{2\pi}{3},\pi]$

$P_3:|\vec{a}-\vec{b}|>1\Leftrightarrow\theta\in[0,\frac{\pi}{3})$　　$P_1:|\vec{a}-\vec{b}|>1\Leftrightarrow\theta\in(\frac{\pi}{3},\pi]$

其中的真命题是（　　）

（A）P_1,P_4　（B）P_1,P_3　（C）P_2,P_3　（D）P_2,P_4

（2011 文 13）已知$\vec{a}$与$\vec{b}$为两个垂直的单位向量，k为实数，若向量$\vec{a}+\vec{b}$与向量$k\vec{a}-\vec{b}$垂直，则$k=$_______

第 1 讲 数量积基础

1.1 向量的概念

（2018.1 茂名一模）对于向量$\vec{a},\vec{b},\vec{c}$和实数λ，下列命题中真命题是（　　）

（A）若$\vec{a}\cdot\vec{b}=0$，则$\vec{a}=0$或$\vec{b}=0$　　　　（B）若$\lambda\vec{a}=0$，则$\lambda=0$或$\vec{a}=0$

（C）若$\vec{a}^2=\vec{b}^2$，则$\vec{a}=\vec{b}$或$\vec{a}=-\vec{b}$　　　　（D）若$\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{a}\cdot\vec{c}$，则$\vec{b}=\vec{c}$

1.2 平行（共线）

（2017 山东文 11）已知向量$\vec{a}=(2,6),\vec{b}=(-1,\lambda)$，若$\vec{a}//\vec{b}$ 则$\lambda=$______

1、**（2017.12 广州调研）**已知向量$\vec{a}=\left(x,x-2\right)$，$\vec{b}=\left(3,4\right)$，若$\vec{a}\,//\,\vec{b}$，则向量$\vec{a}$的模为________

2、**（2017 衡水四调）**设向量$\vec{a}=(-1,2),\vec{b}=(m,1)$，若向量$\vec{a}+2\vec{b}$与$2\vec{a}-\vec{b}$平行，则$m=$（　　）

（A）$-\dfrac{7}{2}$　　（B）$-\dfrac{1}{2}$　　（C）$\dfrac{3}{2}$　　（D）$\dfrac{5}{2}$

3、**（2017 衡水五调）**已知向量$a=\left(-2,1\right),b=\left(-1,3\right)$，则（　　）

（A）$a//b$　　（B）$a\perp b$　　（C）$a\perp\left(a-b\right)$　　（D）$a//\left(a-b\right)$

4、**（2017.03 广一模）**已知向量$\vec{a}=\left(1,2\right)$，$\vec{b}=\left(x,-1\right)$，若$\vec{a}//(\vec{a}-\vec{b})$，则$\vec{a}\cdot\vec{b}=$_______

1.3 垂直

1、**（2017.12 广东五校联考）**设平面向量$\overrightarrow{m}$与向量$\vec{n}$互相垂直，且$\overrightarrow{m}-2\vec{n}=(11,-2)$，若$|\overrightarrow{m}|=5$，则$|\vec{n}|=$ ________

2、**（2017.04 深圳二调）**已知平面向量$\vec{a},\vec{b}$，若$\left|\vec{a}\right|=\sqrt{3},\left|\vec{b}\right|=2$，$\vec{a}$与$\vec{b}$的夹角$\theta=\dfrac{\pi}{6}$，且$(\vec{a}-m\vec{b})\perp\vec{a}$　则$m=$(　　)

（A）$\dfrac{1}{2}$　　（B）1　　（C）$\sqrt{3}$　　（D）2

3、**（2017 广东江西福建三省十校联考）**已知平面向量$\vec{a},\vec{b}$满足$\left|\vec{a}\right|=2,\left|\vec{b}\right|=1$，$\vec{a}$与$\vec{b}$的夹角为$\dfrac{2\pi}{3}$，且$(\vec{a}+\lambda\vec{b})\perp(2\vec{a}-\vec{b})$，则实数$\lambda$的值为________

4、**（2017 河南安阳二模）**已知向量$\vec{a}=(3,1),\vec{b}=(1,3),\vec{c}=(k,-2)$，若$(\vec{a}-\vec{c})\perp(\vec{a}-\vec{b})$，则$k=$____

5、**（2017.03 河南洛阳模拟）**已知$\vec{a},\vec{b}$是非零向量且满足$(\vec{a}-2\vec{b})\perp\vec{a},(\vec{b}-2\vec{a})\perp\vec{b}$，则$\vec{a}$与$\vec{b}$的夹角是（　　）

（A）$\dfrac{\pi}{6}$　　（B）$\dfrac{\pi}{3}$　　（C）$\dfrac{2\pi}{3}$　　（D）$\dfrac{5\pi}{6}$

6、**（2017 广西 5 月考前联考）**设向量$\vec{a}=\left(\log_2 3,m\right)$，$\vec{b}=\left(\log_3 4,-1\right)$，且$\vec{a}\perp\vec{b}$，则$m$的值为__________

1.4 夹角

1、**（2017.12 衡水六调）**已知$\left|\vec{a}\right|=1,\left|\vec{a}+\vec{b}\right|=\sqrt{7},\vec{a}\cdot\left(\vec{b}-\vec{a}\right)=-4$，则向量$\vec{a}$与$\vec{b}$的夹角为________

2、**（2017.03 广一模）**已知$\left|\vec{a}\right|=1,\left|\vec{b}\right|=\sqrt{2}$，且$\vec{a}\perp(\vec{a}-\vec{b})$，则向量$\vec{a}$与向量$\vec{b}$的夹角是___

3、（2017.04 江西八校联考）已知向量$\vec{a},\vec{b}$的夹角为$\dfrac{\pi}{3}$，且$\left|\vec{a}\right|=2$，$\left|\vec{b}\right|=1$，则向量$\vec{a}$与向量$\vec{a}+2\vec{b}$的夹角为（　　）

（A）$\dfrac{\pi}{6}$　　（B）$\dfrac{\pi}{3}$　　（C）$\dfrac{\pi}{4}$　　（D）$\dfrac{\pi}{2}$

4、（2017.03 湖北黄冈调研）已知两个平面向量$\vec{a}$，$\vec{b}$满足$\left|\vec{a}\right|=1$，$\left|\vec{a}-2\vec{b}\right|=\sqrt{21}$，且$\vec{a}$与$\vec{b}$的夹角为$120°$，则$\left|\vec{b}\right|=$__________

5、**（2017 河北邯郸一模）**已知向量$\vec{a},\vec{b}$满足$\left|\vec{a}\right|=2$|，$\left|\vec{b}\right|=3$|，$(\vec{a}-\vec{b})\cdot\vec{a}=1$，则$\vec{a}$与$\vec{b}$的夹角为（　　）

（A）$\dfrac{\pi}{6}$　　（B）$\dfrac{\pi}{3}$　　（C）$\dfrac{\pi}{4}$　　（D）$\dfrac{\pi}{2}$

6、**（2017 山西烟台一模）**已知向量$\vec{a}=(1,3)$，向量$\vec{c}$满足$\left|\vec{c}\right|=\sqrt{10}$，若$\vec{a}\cdot\vec{c}=-5$，则$\vec{a}$与$\vec{c}$的夹角大小为_____

7、**（2017.12 化州一模）**已知$\vec{a}=(2\sin 13^{\circ},2\sin 77^{\circ})$，$\left|\vec{a}-\vec{b}\right|=1$，$\vec{a}$与$\vec{a}-\vec{b}$的夹角为$\dfrac{\pi}{3}$，则$\vec{a}\cdot\vec{b}=$（　　）

（A） 2　　（B）3　　（C）4　　（D）5

8、（2017.12 广东五校联考）设平面向量$\overrightarrow{m}$与向量$\vec{n}$互相垂直，且$\overrightarrow{m}-2\vec{n}=(11,-2)$，若$|\overrightarrow{m}|=5$，则$|\vec{n}|=$________

1.5 模长

利用代数方法处理向量的模长问题，主要采取模长平方——数量积和坐标两种方式

1、模长平方：通过$\vec{a}^2=|\vec{a}|\cdot|\vec{a}|\cos 0=|\vec{a}|^2$可得：$|\vec{a}|^2=\vec{a}^2$，将模长问题转化为数量积问题，从而能够与条件中的已知向量（已知模长，夹角的基向量）找到联系。要注意计算完向量数量积后别忘记开方

2、坐标运算：若$\vec{a}=(x,y)$，则$|\vec{a}|=\sqrt{x^2+y^2}$。某些题目如果能把几何图形放入坐标系中，则只要确定所求向量的坐标，即可求出（或表示）出模长

3、有关模长的不等问题：通常考虑利用“模长平方”或“坐标化”得到模长与某个变量间的函数关系，从而将问题转化为求函数最值问题

例 1：在ΔABC中，O为BC中点，若$AB=1,AC=3,\angle A=60^\circ$，则$|\overrightarrow{OA}|=$ _____

例 2：已知平面向量$\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}$的夹角$\theta\in\left[\frac{\pi}{3},\frac{2\pi}{3}\right]$，且$|\overrightarrow{OA}|=|\overrightarrow{OB}|=3$，若$\overrightarrow{OP}=\frac{1}{3}\overrightarrow{OA}+\frac{2}{3}\overrightarrow{OB}$，则$|\overrightarrow{OP}|$的取值范围是__________

1、（**2017.12 化州一模**）平面向量$\vec{a},\vec{b}$的夹角为60^0，$\vec{a}=(2,0)$，$|\vec{b}|=1$，则$|\vec{a}+2\vec{b}|=$___

2、（**2017.04 山东德州二模**）已知平面向量$\vec{a}$和$\vec{b}$的夹角为60°，$\vec{a}=(2,0)$，$|\vec{b}|=1$，则$|\vec{a}+2\vec{b}|=$（　　）

（A）20　　（B）12　　（C）$4\sqrt{3}$　　（D）$2\sqrt{3}$

3、（**2017 广西南宁一模**）已知非零向量$\vec{a},\vec{b}$满足$|\vec{a}-\vec{b}|=|\vec{a}+2\vec{b}|$，且$\vec{a}$与$\vec{b}$的夹角的余弦值为$-\frac{1}{4}$，则$\frac{|\vec{a}|}{|\vec{b}|}$等于（　　）

（A）$\frac{1}{2}$　　（B）$\frac{2}{3}$　　（C）$\frac{3}{2}$　　（D）2

4、（**2017 河南安阳一模**）已知平面向量 $\vec{a}=(1,2),\vec{b}=(-2,m)$，且 $\left|\vec{a}+\vec{b}\right|=\left|\vec{a}-\vec{b}\right|$|，则 $\left|\vec{a}+2\vec{b}\right|=$ ________

5、（**2017 吉林省市模拟**）已知向量 $\vec{a},\vec{b}$ 满足 $\left|\vec{a}\right|=\left|\vec{b}\right|=\left|\vec{a}+\vec{b}\right|=1$，则 $\left|2\vec{a}+\vec{b}\right|=$（　　）

（A）3　　　　（B）$\sqrt{3}$　　　　（C）7　　　　（D）$\sqrt{7}$

6、（**2017 山东潍坊一模**）已知向量 $\vec{a},\vec{b}$，其中 $\left|\overline{a}\right|=2,\left|\vec{b}\right|=1$，且 $\left(\vec{a}+\vec{b}\right)\perp\vec{a}$，则 $\left|\overline{a}-2\vec{b}\right|=$ _______

7、（**2017.03 安徽安庆二模**）已知向量 $\left|\overrightarrow{a}\right|=\sqrt{3},\left|\vec{b}\right|=2,\vec{a}\cdot(\vec{a}-\vec{b})=0$，则 $\left|\vec{a}-\vec{b}\right|=$ _______

8、（**2017.12 化州一模**）平面向量 $\vec{a},\vec{b}$ 的夹角为 60^0，$\vec{a}=(2,0)$，$\left|\vec{b}\right|=1$，则 $\left|\vec{a}+2\vec{b}\right|=$ ___

9、（**2017.12 福建华安一中**）已知向量 $\vec{a}=(1,1),\vec{b}=(2,y)$，若 $\left|\vec{a}+\vec{b}\right|=\vec{a}\cdot\vec{b}$，则 $y=$ ______

1.5　投影

投影的计算公式：$\lambda_{\vec{a}\to\vec{b}}=\dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{b}|}$

例：（2017 北京文 12）已知点 P 在圆 $x^2+y^2=1$ 上，点 A 的坐标为 $(-2,0)$，O 为原点，则 $\overrightarrow{AO}\cdot\overrightarrow{AP}$ 的最大值为________

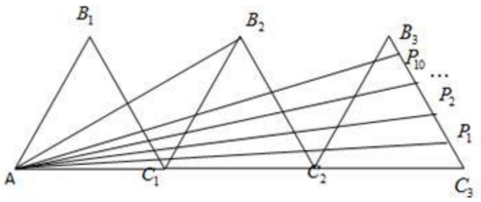
1、（2017 安徽黄山二模）已知 $\vec{a}=(\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2})$，$|\vec{b}|=1,|\vec{a}+2\vec{b}|=2$，则 $\vec{b}$ 在 $\vec{a}$ 上的投影为________

2、（2017.12 福建华安一中）已知向量 $\vec{a},\vec{b}$ 的夹角为 60^0，且 $|\vec{a}|=|\vec{b}|=2$，则向量 $\vec{a}+\vec{b}$ 在向量 $\vec{a}$ 方向上的投影为（　　）

（A）3　　（B）$\sqrt{3}$　　（C）-3　　（D）$-\sqrt{3}$

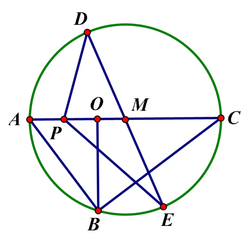
3、（2017 山西一模）在 ΔABC 中，已知 $AB=2,AC=1,A=60^\circ$，D 为 AB 的中点，则向量 $\overrightarrow{AD}$ 在 $\overrightarrow{BC}$ 上的投影为________

4、（2017 荆襄宜等四地七校联考）如图，三个边长为的等边三角形有一条边在同一直线上，边 B_3C_3 上有 10 个不同的点 $P_1,P_2,\cdots,P_{10}$，记 $m_i=\overrightarrow{AB_2}\bullet\overrightarrow{AP_i}(i=1,2\cdots,10)$，则 $m_1+m_2+\cdots+m_{10}$ 的值为（　　）



（A）$15\sqrt{3}$　　（B）45　　（C）$60\sqrt{3}$　　（D）180

5、已知 $\odot M$ 为直角三角形 ABC 的外接圆，OB 是斜边 AC 上的高，且 $|AC|=6,|OB|=2\sqrt{2}$，$|AO|<|OC|$，点 P 为线段 OA 的中点，若 DE 是 $\odot M$ 中绕圆心 M 运动的一条直径，则 $\overrightarrow{PD}\cdot\overrightarrow{PE}=$________



第 2 讲　平面向量基本定理

应用平面向量基本定理表示向量的实质是利用平行四边形法则或三角形法则进行向量的加、减或数乘运算．用向量基本定理解决问题的一般思路是：先选择一组基底，并运用该基底将条件和结论表示成向量的形式，再通过向量的运算来解决

1、（2017 四川七中三诊）设 D 为 ΔABC 中 BC 边上的中点，且 O 为 AD 边上靠近点 A 的三等分点，则（　　）

（A）$\overrightarrow{BO}=-\frac{5}{6}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{6}\overrightarrow{AC}$　　（B）$\overrightarrow{BO}=\frac{1}{6}\overrightarrow{AB}-\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$

（C）$\overrightarrow{BO}=\frac{5}{6}\overrightarrow{AB}-\frac{1}{6}\overrightarrow{AC}$　　（D）$\overrightarrow{BO}=-\frac{1}{6}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$

2、（2017 河北五个一联盟）已知点 $A(1,0),B=(1,\sqrt{3})$，点 C 在第二象限，且 $\angle AOC=120^{\circ}$，$\overrightarrow{OC}=4\overrightarrow{OA}+\lambda\overrightarrow{OB}$，则 $\lambda=$________

3、（2017.03 吉林长春二模）在 ΔABC 中，D 为三角形所在平面内一点，且 $\overrightarrow{AD}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$，则 $\frac{S_{\Delta ABD}}{S_{\Delta ABC}}=$（　　）

（A）$\frac{2}{3}$　　（B）$\frac{1}{3}$　　（C）$\frac{1}{6}$　　（D）$\frac{1}{2}$

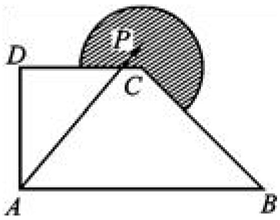
4、（2017 湖北重点中学联考）若等边 ΔABC 的边长为 3，平面内一点 M 满足 $\overrightarrow{CM}=\frac{1}{3}\overrightarrow{CB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{CA}$，则 $\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{MB}$ 的值为________

5、（2017 江西 4 月质检）在矩形 $ABCD$ 中，$AB=2$，$AD=3$，点 F 为 CD 的中点，点 E 在 BC 边上，若 $\overrightarrow{AF}\cdot\overrightarrow{DE}=-4$，则 $\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{BF}$ 的值为（　　）

（A） 0　　（B）1　　（C）2　　（D）3

6、（2017 江西上饶一模）在边长为 1 的正方形 $ABCD$ 中，$2\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{EB}$，$BC$ 的中点为 F，$\overrightarrow{EF}=2\overrightarrow{FG}$，则 $\overrightarrow{EG}\cdot\overrightarrow{BD}=$________

7、（2017 四川资阳 4 月模拟）如图，在直角梯形 $ABCD$ 中， $AB \perp AD$， $AB \parallel DC$，$AB=2$， $AD=DC=1$，图中圆弧所在圆的圆心为点 C，半径为 $\frac{1}{2}$，且点 P 在图中阴影部分(包括边界)运动. 若 $\overrightarrow{AP}=x\overrightarrow{AB}+y\overrightarrow{BC}$，其中 x，$y\in R$，则 $4x-y$ 的取值范围是(　　)



（A） $\left[2, 3+\frac{3\sqrt{2}}{4}\right]$　　　　（B） $\left[2, 3+\frac{\sqrt{5}}{2}\right]$

（B） $\left[3-\frac{\sqrt{2}}{4}, 3+\frac{\sqrt{5}}{2}\right]$　　　　（D） $\left[3-\frac{\sqrt{17}}{2}, 3+\frac{\sqrt{17}}{2}\right]$

8、菱形 $ABCD$ 边长为 2，$\angle BAD=120^\circ$，点 E,F 分别在 BC,CD 上，且 $\overrightarrow{BE}=\lambda\overrightarrow{BC},\overrightarrow{DF}=\mu\overrightarrow{DC}$，若 $\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{AF}=1,\overrightarrow{CE}\cdot\overrightarrow{CF}=-\frac{3}{2}$，则 $\lambda+\mu=$（　　）

（A）$\frac{1}{2}$　　（B）$\frac{3}{2}$　　（C）$\frac{5}{4}$　　（D）$\frac{7}{12}$

第 3 讲 最值（范围）

注意下几何意义，一般有几何法可以解答

例 1：（2017 浙江 14）已知向量 $\vec{a},\vec{b}$ 满足 $\left|\vec{a}\right|=1,\left|\vec{b}\right|=2$，则 $\left|\vec{a}+\vec{b}\right|+\left|\vec{a}-\vec{b}\right|$ 的最小值是________，最大值是_______

例 2：设直角 ΔABC 的三个顶点都在单位圆 $x^2+y^2=1$ 上，点 $M(\frac{1}{2},\frac{1}{2})$，则 $|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}|$ 的最大值是（　　）

（A）$\sqrt{2}+1$　（B）$\sqrt{2}+2$　（C）$\frac{3\sqrt{2}}{2}+1$　（D）$\frac{3\sqrt{2}}{2}+2$

例 3：若 $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ 均为单位向量，且 $\vec{a}\cdot\vec{b}=0,\left(\vec{a}-\vec{c}\right)\cdot\left(\vec{b}-\vec{c}\right)\le 0$，则 $\left|\vec{a}+\vec{b}-\vec{c}\right|$ 的最大值为（　　）

（A）$\sqrt{2}-1$　（B）1　（C）$\sqrt{2}$　（D）2

例 4：已知平面向量 $\vec{\alpha},\vec{\beta}$ 满足 $\left|\vec{\alpha}-2\vec{\beta}\right|=\sqrt{3}$，且 $\vec{\alpha}+\vec{\beta}$ 与 $\vec{\alpha}-2\vec{\beta}$ 的夹角为 150°，则 $\left|t\left(\vec{\alpha}+\vec{\beta}\right)-\frac{3}{2}\vec{\beta}\right|\left(t\in R\right)$ 的最小值是（　　）

（A）$\frac{\sqrt{3}}{4}$　（B）$\frac{\sqrt{3}}{3}$　（C）$\frac{\sqrt{3}}{2}$　（D）$\sqrt{3}$

1、（2017 河南三门峡一模）已知平面向量 $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ 满足 $\left|\vec{a}\right|=\sqrt{2},\left|\vec{b}\right|=1,\vec{a}\cdot\vec{b}=-1|$，且 $\vec{a}-\vec{c}$ 与 $\vec{b}-\vec{c}$ 的夹角为 $\frac{\pi}{4}$，则 $\vec{c}$ 的最大值为（　　）

（A）$\sqrt{10}$　（B）$2\sqrt{2}$　（C）$\sqrt{5}$　（D）4

2、（2017 江苏南京二模）已知平面向量 $\overrightarrow{AC}=(1,2),\overrightarrow{BD}=(-2,2)$，则 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD}$ 的最小值为__________

3、**（2017 湖北荆襄一中三模）** 已知点 P 是圆 $x^2+y^2=4$ 上的动点，点 A,B,C 是以坐标原点为圆心的单位圆上的动点，且 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}=0$，则 $\left|\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC}\right|$ 的最小值为（　　）

（A）4　　（B）5　　（C）6　　（D）7

4、**（2017 南昌一调）** 已知 A,B,C 是圆 $O:x^2+y^2=1$ 上的动点，且 $AC\perp BC$，若点 M 的坐标是 $(1,1)$，则 $|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}|$ 的最大值为（　　）

（A）3　　（B）4　　（C）$3\sqrt{2}-1$　　（D）$3\sqrt{2}+1$

5、**（2017 江西九江十校联考二模）** 设 A,B 在圆 $x^2+y^2=1$ 上运动，且 $\left|AB\right|=\sqrt{3}$，点 P 在直线 $3x+4y-12=0$ 上运动，则 $\left|\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}\right|$ 的最小值为（　　）

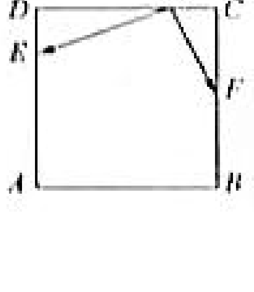
（A）3　　（B）4　　（C）$\dfrac{17}{5}$　　（D）$\dfrac{19}{5}$

6、**（2017 江苏南京一模）** ΔABC 是直角边等于 4 的等腰直角三角形，D 是斜边 BC 的中点，$\overrightarrow{AM}=\dfrac{1}{4}\overrightarrow{AB}+m\overrightarrow{AC}$，向量 $\overrightarrow{AM}$ 的终点 M 在 ΔACD 的内部（不含边界），则 $\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{BM}$ 的取值范围是__________

7、**（2017 山东日照一模）** 已知向量 $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ 满足 $\left|\vec{a}\right|=4,\left|\vec{b}\right|=2\sqrt{2},<\vec{a},\vec{b}>=\dfrac{\pi}{4}$，$(\vec{c}-\vec{a})\cdot(\vec{c}-\vec{b})=-1$，则 $\left|\vec{c}-\vec{a}\right|$ 的最大值为__________

8、（2017 湖南娄底二模）已知 $\left|\vec{a}\right|=3,\left|\vec{b}\right|=4,\vec{a}\cdot\vec{b}=0$，若向量满足 $(\vec{a}-\vec{c})\cdot(\vec{b}-\vec{c})=0$，则 $\left|\vec{c}\right|$ 的取值范围是__________

9、**（2017 山东济南一模）** 如图，正方形 $ABCD$ 的边长为 8，点 E,F 分别在边 AD,BC 上，且 $AE=3ED,CF=FB$，如果对于常数 m，在正方形 $ABCD$ 的四条边上有且只有 6 个不同的点 P，使得 $\overrightarrow{PE}\cdot\overrightarrow{PF}=m$ 成立，那么 m 的取值范围是____.



10、（2017 北京西城区 5 月模拟）设$\vec{a},\vec{b}$是平面上的两个单位向量，$\vec{a}\cdot\vec{b}=\frac{3}{5}$，若$m\in R$，则$\left|\vec{a}+m\vec{b}\right|$的最小值是（　　）

（A）$\frac{3}{4}$　　（B）$\frac{4}{3}$　　（C）$\frac{4}{5}$　　（D）$\frac{5}{4}$

11、（2017 浙江绍兴一模）向量$\vec{a},\vec{b}$满足$\left|\vec{a}\right|=4,\vec{b}\cdot(\vec{a}-\vec{b})=0|$，若$\left|\lambda\vec{a}-\vec{b}\right|$的最小值为 2，则$\vec{a}\cdot\vec{b}=$（　　）

（A）0　　（B）4　　（C）8　　（D）16

12、（2017 浙江嘉兴一模）已知平面向量$\vec{a},\vec{b}$满足$\left|\vec{a}\right|=\left|\vec{b}\right|=1,\vec{a}\cdot\vec{b}=\frac{1}{2}|$，若向量$\vec{c}$满足$\left|\vec{a}-\vec{b}+\vec{c}\right|\le 1$，则$\left|\vec{c}\right|$的最大值为（　　）

（A）1　　（B）$\sqrt{2}$　　（C）$\sqrt{3}$　　（D）2

13、（2017 江西师大附中、临川一中联考）在直角ΔABC中,$\angle BCA=90^0$，$CA=CB=1$，P为AB边上的点，$\overrightarrow{AP}=\lambda\overrightarrow{AB}$　若$\overrightarrow{CP}\cdot\overrightarrow{AB}\ge\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}$,则$\lambda$的最大值是(　　)

（A）$\frac{2+\sqrt{2}}{2}$　　（B）$\frac{2-\sqrt{2}}{2}$　　（C）1　　（D）$\sqrt{2}$

14、（2017 云南师大附中月考）已知平面向量$\vec{a},\vec{b},\vec{c}$满足$\left|\vec{a}\right|=1,\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{c}=1,\vec{a}\cdot\vec{c}=2$，则$\left|\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}\right|$的最小值是__________

15、（2017 湖北重点中学联考）在直径$AB=4$的圆上有长度为2的动弦CD,则$\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BD}$的最大值为_________.

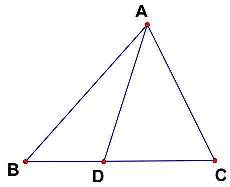
16、（2017.02 武汉调研）已知$\vec{m},\vec{n}$为两个非零向量，且$\left|\vec{m}\right|=2,\left|\vec{m}+2\vec{n}\right|=2$，则$\left|2\vec{m}+\vec{n}\right|+\left|\vec{n}\right|$的最大值为_______

第 4 讲 等和线

“爪”字型图及性质：

（1）已知 $\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}$ 为不共线的两个向量，则对于向量 $\overrightarrow{AD}$，必存在 x,y，使得

$\overrightarrow{AD}=x\overrightarrow{AB}+y\overrightarrow{AC}$。则 B,C,D 三点共线 $\Leftrightarrow$ $x+y=1$



当 $0<x+y<1$，则 D 与 A 位于 BC 同侧，且 D 位于 A 与 BC 之间

当 $x+y>1$，则 D 与 A 位于 BC 两侧

$x+y=1$ 时，当 $x>0,y>0$，则 D 在线段 BC 上；当 $xy<0$，则 D 在线段 BC 延长线上

（2）已知 D 在线段 BC 上，且 $|BD|:|CD|=m:n$，则 $\overrightarrow{AD}=\dfrac{n}{m+n}\overrightarrow{AB}+\dfrac{m}{m+n}\overrightarrow{AC}$

补充：

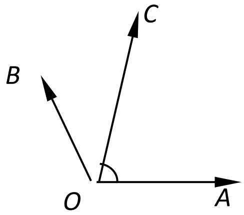
例1：（2017全国Ⅲ卷理12）在矩形 $ABCD$ 中，$AB=1$，$AD=2$，动点 P 在以点 C 为圆心且与 BD 相切的圆上．若 $\overrightarrow{AP}=\lambda\overrightarrow{AB}+\mu\overrightarrow{AD}$，则 $\lambda+\mu$ 的最大值为（　　）

（A）3　　（B）$2\sqrt{2}$　　（C ）$\sqrt{5}$　　（D）2

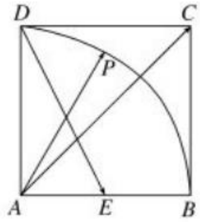
例 2：在 ΔABC 中，D 为 BC 边的中点，H 为 AD 的中点，过点 H 作一直线 MN 分别交 AB,AC 于点 M,N，若 $\overrightarrow{AM}=x\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AN}=y\overrightarrow{AC}$，则 $x+4y$ 的最小值是（　　）

（A）$\dfrac{9}{4}$　　（B）2　　（C）$\sqrt{3}$　　（D）1

例 3:（2017 江苏 12）如图,在同一个平面内,向量 $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OC}$ 的模分别为 1,1, $\sqrt{2}$, $\overrightarrow{OA}$ 与 $\overrightarrow{OC}$ 的夹角为 α ,且 $\tan\alpha=7$，$\overrightarrow{OB}$ 与 $\overrightarrow{OC}$ 的夹角为 45°.若 $\overrightarrow{OC}=m\overrightarrow{OA}+n\overrightarrow{OB}$ $(m,n\in\mathbf{R})$，则 $m+n=$____



例 4：如图，在四边形 $ABCD$ 中，E 为 AB 边的中点，P 为以 A 为圆心，AB 为半径的圆弧上任意一点，设 $\overrightarrow{AC}=\lambda\overrightarrow{DE}+\mu\overrightarrow{AP}$，则 $\lambda+\mu$ 的最小值是__________



1、(**2017江西南昌十所重点二模**)已知数列$\{a_n\}$为等差数列,且满足$\overrightarrow{BA}=a_3\overrightarrow{OB}+a_{2015}\overrightarrow{OC}$,若$\overrightarrow{AB}=\lambda\overrightarrow{AC}(\lambda\in R)$,点$O$为直线$BC$外一点,则$a_1+a_{2017}=$________

2、(**2017全国高中联赛福建联赛**)A,B,C为圆O上不同的三点,且$\angle AOB=120^\circ$,点C在劣弧$\overset{\frown}{AB}$内,若$\overrightarrow{OC}=\lambda\overrightarrow{OA}+\mu\overrightarrow{OB}(\lambda,\mu\in R)$,则$\lambda+\mu$的取值范围为__________

3、(**2017.04 武汉调研**)已知ΔABC的外接圆圆心为O,且$\angle A=60^\circ$,若$\overrightarrow{AO}=\alpha\overrightarrow{AB}+\beta\overrightarrow{AC}(\alpha,\beta\in R)$,则$\alpha+\beta$的最大值为________

4、(**2017 黑龙江哈师大附中三模**)已知$AB\perp AC$,$AB=AC$,点M满足$\overrightarrow{AM}=t\overrightarrow{AB}+(1-t)\overrightarrow{AC}$,若$\angle BAM=\dfrac{\pi}{3}$,则$t$的值为( )

(A)$\sqrt{3}-\sqrt{2}$ (B)$\sqrt{2}-1$ (C)$\dfrac{\sqrt{3}-1}{2}$ (D)$\dfrac{\sqrt{3}+1}{2}$

5、已知I为ΔABC的内心,$\cos A=\dfrac{7}{8}$,若$\overrightarrow{AI}=x\overrightarrow{AB}+y\overrightarrow{AC}$,则$x+y$的最大值为( )

(A)$\dfrac{1}{2}$ (B)$\dfrac{3}{4}$ (C)$\dfrac{4}{5}$ (D)$\dfrac{5}{6}$

6、已知I为ΔABC的内心,$AC=2,BC=3,AB=4$,若$\overrightarrow{AI}=x\overrightarrow{AB}+y\overrightarrow{AC}$,则$x+y=$____

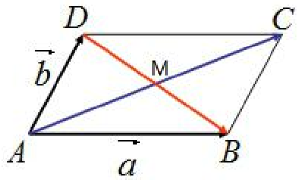
7、已知O为锐角ΔABC的外心,$A=60^\circ$,若$\overrightarrow{AO}=x\overrightarrow{AB}+y\overrightarrow{AC}$,则$x+y$的最大值为______

8、已知O为锐角ΔABC的外心,$A=60^\circ$,若$\overrightarrow{OA}=x\overrightarrow{OB}+y\overrightarrow{OC}$,则$2x-y$的最大值为______

9、(**2017 浙江金华高三上期末考**)设单位向量$\vec{a},\vec{b}$的夹角为锐角,若对任意的$(x,y)\in\{(x,y)\,\big|\,x\vec{a}+y\vec{b}=1,xy\geq 0\}$,都有$|x+2y|\leq\dfrac{8}{\sqrt{15}}$,则$\vec{a}\cdot\vec{b}$的最小值为________

第 5 讲　极化恒等式

极化恒等式： $\vec{a}\cdot\vec{b}=\frac{1}{4}[(\vec{a}+\vec{b})^2-(\vec{a}-\vec{b})^2]$



（1）平行四边形模式： $\vec{a}\cdot\vec{b}=\frac{1}{4}\left[\left|AC\right|^2-\left|DB\right|^2\right]$

（2）三角形模式：

在右上图的三角形 ABD 中（M 为 BD 的中点），

因为 $AC=2AM$，所以 $\vec{a}\cdot\vec{b}=\left|\overline{AM}\right|^2-\frac{1}{4}\left|\overline{DB}\right|^2$

例 1：（2017 全国Ⅱ卷理 12）已知 ΔABC 是边长为 2 的等边三角形，P 为平面 ABC 内一点，则 $\overrightarrow{PA}\cdot(\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC})$ 的最小值是（　　）

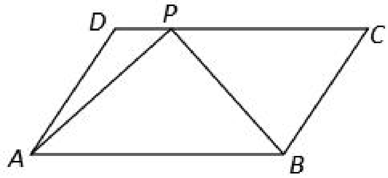
（A）-2　　　（B ）$-\frac{3}{2}$　　　（C）$-\frac{4}{3}$　　　（D）-1

例 2：已知正三角形 ABC 内接于半径为 2 的圆 O，点 P 是圆 O 上的一个动点，则 $\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}$ 的取值范围是__________

例 3：在 ΔABC 中，P_0 是边 AB 上一定点，满足 $P_0B=\frac{1}{4}AB$，且对于边 AB 上任一点 P，恒有 $\overrightarrow{PB}\cdot\overrightarrow{PC}\ge\overrightarrow{P_0B}\cdot\overrightarrow{P_0C}$。则(　　　)

（A）$\angle ABC=90^\circ$　　（B）$\angle BAC=90^\circ$　　（C）$AB=AC$　　（D）$AC=BC$

例 4：如图，在平行四边形 $ABCD$ 中，已知 $AB=8$，$AD=5$，$\overrightarrow{CP}=3\overrightarrow{PD}$，$\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{BP}=2$，则 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}$ 的值是______.



例 5：已知 A,B 是圆 O：$x^2+y^2=1$ 的两个点，P 是线段 AB 上的动点，当 ΔAOB 的面积最大时，则 $\overrightarrow{AO}\cdot\overrightarrow{AP}-\overrightarrow{AP}^2$ 的最大值是________

例 6：（2017 浙江绍兴二检）在 ΔABC 中，$AC\perp BC$，P_0 是边 AB 上一定点，满足 $P_0B=\frac{1}{3}AB$，且对于边 AB 上任一点 P，恒有 $\overrightarrow{PB}\cdot\overrightarrow{PC}\ge\overrightarrow{P_0B}\cdot\overrightarrow{P_0C}$。则 $\frac{BC}{AC}=$_________

1、(2017 山西五校联考)在平行四边形 $ABCD$ 中，$AB=3, AD=4$，则 $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{DB}$ 等于______

2、（2017 江苏盐城一模）在 ΔABC 中，已知 $AB=\sqrt{3}, C=\frac{\pi}{3}$，则 $\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB}$ 的最大值为______

3、（**2016 全国高中联赛湖北联赛**）已知 MN 是边长为 $2\sqrt{6}$ 的等边 ΔABC 外接圆的一条动弦，$MN=4$，P 是 ΔABC 的边上动点，则 $\overrightarrow{MP}\cdot\overrightarrow{PN}$ 的最大值为________

4、（2017 四川雅安三诊）直线 $ax+by+c=0$ 与圆 O：$x^2+y^2=16$ 相交于两点 M、N. 若 $c^2=a^2+b^2$，P 为圆 O 上任意一点，则 $\overrightarrow{PM}\cdot\overrightarrow{PN}$ 的取值范围是________

5、（2016 石嘴山适应性考试）在 $Rt\Delta ABC$ 中，$CA=CB=3$，M,N 是斜边 AB 上的两个动点，且 $MN=\sqrt{2}$，则 $\overrightarrow{CM}\cdot\overrightarrow{CN}$ 的取值范围为__________

6、（**2013 浙江五校联盟二联**）已知 A、B 是单位圆上的两点，O 为圆心，且 $\angle AOB=120^o$，MN 是圆 O 的一条直径，点 C 在圆内，且满足 $\overrightarrow{OC}=\lambda\overrightarrow{OA}+(1-\lambda)\overrightarrow{OB}(0<\lambda<1)$，则 $\overrightarrow{CM}\cdot\overrightarrow{CN}$ 的取值范围是（　　）

（A）$\left[-\frac{1}{2},1\right)$　　（B）$[-1,1)$　　（C）$\left[-\frac{3}{4},0\right)$　　（D）$[-1,0)$

7、（2012 浙江 15）在 ΔABC 中，M 是 BC 的中点，$AM=3, BC=10$，则 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=$____

8、已知向量 $\vec{a},\vec{b}$ 的夹角为 $\frac{\pi}{3}$，$\left|\vec{a}-\vec{b}\right|=5$，向量 $\vec{c}-\vec{a}$，$\vec{c}-\vec{b}$ 的夹角为 $\frac{2\pi}{3}$，$\left|\vec{c}-\vec{a}\right|=2\sqrt{3}$，则 $\vec{a}\cdot\vec{c}$ 的最大值为_____

9、已知 ΔABC 的面积为 2，E,F 分别为 AB,AC 中点，点 P 在 EF 上，则 $\overrightarrow{PC}\cdot\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{BC}^2$ 的最小值为________

10、平面向量 $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ 满足 $\left|\vec{e}\right|=1, \vec{a}\cdot\vec{e}=1, \vec{b}\cdot\vec{e}=2, \left|\vec{a}-\vec{b}\right|=2$，则 $\vec{a}\cdot\vec{b}$ 的最小值为____

第6讲　“五心”问题（奔驰定理）

奔驰定理：已知点O是ΔABC中的任意一点，则$S_{\Delta BOC}\cdot\overrightarrow{OA}+S_{\Delta AOC}\cdot\overrightarrow{OB}+S_{\Delta AOB}\cdot\overrightarrow{OC}=\vec{0}$

例1：三角形的四心向量表达：（旁心不做要求）

求证：（1）已知点O为ΔABC的重心，则$\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=\vec{0}$

（2）已知点O为ΔABC的垂心，则$\tan A\cdot\overrightarrow{OA}+\tan B\cdot\overrightarrow{OB}+\tan C\cdot\overrightarrow{OC}=\vec{0}$

（3）已知点O为ΔABC的外心，则$\sin 2A\cdot\overrightarrow{OA}+\sin 2B\cdot\overrightarrow{OB}+\sin 2C\cdot\overrightarrow{OC}=\vec{0}$

（4）已知点O为ΔABC的内心，则$a\cdot\overrightarrow{OA}+b\cdot\overrightarrow{OB}+c\cdot\overrightarrow{OC}=\vec{0}$

例2：O是平面上一定点，A、B、C是平面上不共线的三个点，动点P满足$\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OA}+\lambda(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}),\lambda\in[0,+\infty)$，则点$P$的轨迹一定通过$\Delta ABC$的（　　）

（A）外心　　（B）内心　　（C）重心　　（D）垂心

例3：O是平面上一定点，A、B、C是平面上不共线的三个点，动点P满足$\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OA}+\lambda(\frac{\overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AB}|}+\frac{\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AC}|}),\lambda\in[0,+\infty)$，则点$P$的轨迹一定通过$\Delta ABC$的（　　）

（A）外心　　（B）内心　　（C）重心　　（D）垂心

例4：O是平面上一定点，A、B、C是平面上不共线的三个点，动点P满足$\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OA}+\lambda(\frac{\overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AB}|\cos B}+\frac{\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AC}|\cos C}),\lambda\in[0,+\infty)$，则点$P$的轨迹一定通过$\Delta ABC$的（　　）

（A）外心　　（B）内心　　（C）重心　　（D）垂心

例5：已知P为ΔABC的内部一点，且$|\overrightarrow{PA}|=|\overrightarrow{PB}|=2,\angle APB=\frac{5\pi}{6}$，$2\overrightarrow{PA}+3\overrightarrow{PB}+4\overrightarrow{PC}=\vec{0}$，则$\Delta ABC$的面积为__________

1、（2017全国高中联赛山东预赛）设I为ΔABC的内心，且$3\overrightarrow{IA}+4\overrightarrow{IB}+5\overrightarrow{IC}=0$，则角$C=$________

2、（2017辽宁三校联考）已知A,B,C是平面上不共线的三点，O是ΔABC的重心，动点P满足$\overrightarrow{OP}=\frac{1}{3}(\frac{1}{2}\overrightarrow{OA}+\frac{1}{2}\overrightarrow{OB}+2\overrightarrow{OC})$，则$P$一定为$\Delta ABC$的（　　）

（A）AB边中线的三等分点（非重心）　　（B）AB边的中点

（C）AB边中线的中点　　（D）重心

3、（2017衡水四调）在ΔABC中，$AB=3$，$AC=5$，若O为△ABC外接圆的圆心（即满足$OA=OB=OC$），则$\overrightarrow{AO}\cdot\overrightarrow{BC}$的值为__________

4、（2017安徽马鞍山二模）已知P Q为ΔABC中不同的两点，且$3\overrightarrow{PA}+2\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC}=0$，$\overrightarrow{QA}+\overrightarrow{QB}+\overrightarrow{QC}=0$，则$S_{\Delta PAB}:S_{\Delta QAB}$为（　　）

（A）$1:2$　　（B）$2:1$　　（C）$2:3$　　（D）$3:2$

5、（2017广东七校二联）P、Q为三角形ABC中不同的两点,若$\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC}=\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{QA}+3\overrightarrow{QB}+5\overrightarrow{QC}=\vec{0}$,则$S_{\triangle PAB}:S_{\triangle QAB}$为（　　）

（A）$\frac{1}{3}$　　（B）$\frac{3}{5}$　　（C）$\frac{5}{7}$　　（D）$\frac{7}{9}$

6、（1）已知ΔABC的重心为O，且$AB=5,BC=2\sqrt{3},AC=3$，则$\overrightarrow{AO}\cdot\overrightarrow{BC}$的值是_______

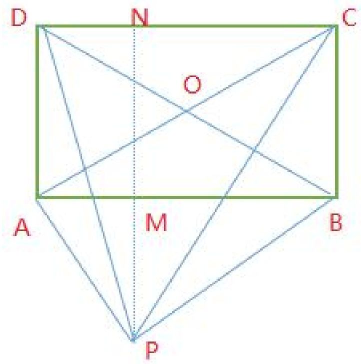
（2）已知ΔABC的外心为O，且$AB=5,BC=2\sqrt{3},AC=3$，则$\overrightarrow{AO}\cdot\overrightarrow{BC}$的值是_______

第 7 讲 矩形的两个小性质

性质 1、已知矩形 $ABCD$， P 是空间任意一点，则 $\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PC}=\overrightarrow{PB}\cdot\overrightarrow{PD}$

性质 2、已知矩形 $ABCD$， P 是空间任意一点，则 $|PA|^2+|PC|^2=|PB|^2+|PD|^2$

性质 1 由极化恒等式易证，性质 2 由勾股定理易证



下面简单证明下：

性质 1：由极化恒等式

有 $\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PC}=\overrightarrow{PO}^2-(\frac{\overrightarrow{AC}}{2})^2$ $\quad\overrightarrow{PB}\cdot\overrightarrow{PD}=\overrightarrow{PO}^2-(\frac{\overrightarrow{BD}}{2})^2$

从而 $\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PC}=\overrightarrow{PB}\cdot\overrightarrow{PD}$ 得证

性质 2：

由勾股定理，

$|PA|^2-|PB|^2=|MA|^2-|MB|^2=|ND|^2-|NC|^2=|PD|^2-|PC|^2$

即 $|PA|^2+|PC|^2=|PB|^2+|PD|^2$

1、点 P 是矩形 $ABCD$ 内一点， $PA=3,PC=4,AC=6$ ，则 $\overrightarrow{PB}\cdot\overrightarrow{PD}=$__________

2、点 P 是矩形 $ABCD$ 内一点， $PA=1,PB=2,PC=3$ ，则 $PD=$_________

3、**（2012 江西理 7）**在直角三角形 ABC 中，点 D 是斜边 AB 的中点，点 P 是线段 CD 的中点，则 $\dfrac{|PA|^2+|PB|^2}{|PC|^2}=$（　　）

（A）2　　　（B）4　　　（C）5　　　（D）10

4、**（2013 重庆理 10）**在平面上， $\overrightarrow{AB_1}\perp\overrightarrow{AB_2}$ ， $|\overrightarrow{OB_1}|=|\overrightarrow{OB_2}|=1$, $\overrightarrow{AP}=\overrightarrow{AB_1}+\overrightarrow{AB_2}$.若 $|\overrightarrow{OP}|<\frac{1}{2}$，则 $|\overrightarrow{OA}|$ 的取值范围是（　）

（A）$(0,\frac{\sqrt{5}}{2}]$　　（B）$(\frac{\sqrt{5}}{2},\frac{\sqrt{7}}{2}]$　　（C）$(\frac{\sqrt{5}}{2},\sqrt{2}]$　　（D）$(\frac{\sqrt{7}}{2},\sqrt{2}]$

第 8 讲　向量与其他知识综合

（2017 北京文 7）设$\vec{m},\vec{n}$为非零向量，则"存在负数λ，使得$\vec{m}=\lambda\vec{n}$"是"$\vec{m}\cdot\vec{n}<0$"的（　）

（A）充分而不必要条件　　（B）必要而不充分条件

（C）充分必要条件　　（D）既不充分也不必要条件

1、**（2017.12 河北鸡泽一中月考）**已知向量$\vec{a}=(x-1,2)$，$\vec{b}=(2,1)$，则"$x>0$"是"$\vec{a}$与$\vec{b}$夹角为锐角"的（　　）

（A）充分不必要条件　　（B）必要不充分条件

（C）充要条件　　（D）既不充分也不必要条件

2、**（2017 江苏泰州一模）**在ΔABC中，若$\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{BA}+2\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB}$，则$\dfrac{\sin A}{\sin C}=$的值为__________

3、**（2017 江西九江十校联考二模）**设椭圆$\dfrac{x^2}{16}+\dfrac{y^2}{12}=1$的左右交点分别为$F_1,F_2$，点$P$在椭圆上，且满足$\overrightarrow{PF_1}\cdot\overrightarrow{PF_2}=9$，则$\left|\overrightarrow{PF_1}\right|\cdot\left|\overrightarrow{PF_2}\right|$的值为（　　）

（A）8　　（B）10　　（C）12　　（D）15

4、**（2017.03 厦门一模）**在平行四边形$ABCD$中，$AB=3,AD=2,\overrightarrow{AP}=\dfrac{1}{3}\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{AQ}=\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AD}$，若$\overrightarrow{CP}\cdot\overrightarrow{CQ}=12$，则$\angle BAD=$（　　）.

（A）$\dfrac{\pi}{4}$　　（B）$\dfrac{\pi}{3}$　　（C）$\dfrac{\pi}{2}$　　（D）$\dfrac{2\pi}{3}$

5、**（2016 稽阳联考）**在正方体$ABCD-A_1B_1C_1D_1$中，$AB=2\sqrt{3}$，点E,F在线段DB_1上，且$DE=EF=FB_1$，点M是正方体表面上的一动点，点P,Q是空间两动点，若$\dfrac{|PE|}{|PF|}=\dfrac{|QE|}{|QF|}=2$且$PQ=4$，则$\overrightarrow{MP}\cdot\overrightarrow{MQ}$的最小值为_________

第 9 讲　斜坐标系

没什么意思的东西，用其他的办法一般也不会太慢

1、**（2017 全国高中联赛福建联赛）** A,B,C 为圆 O 上不同的三点，且 $\angle AOB=120^{\circ}$，点 C 在劣弧 $\overset{\frown}{AB}$ 内，若 $\overrightarrow{OC}=\lambda\overrightarrow{OA}+\mu\overrightarrow{OB}(\lambda,\mu\in R)$，则 $\lambda+\mu$ 的取值范围为____________

2、**（2013 年安徽理 9）** 在平面直角坐标系中，O 是坐标原点，两定点 A,B 满足 $\left|\overrightarrow{OA}\right|=\left|\overrightarrow{OB}\right|=\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=2$，则点集 $\{P\left|\overrightarrow{OP}=\lambda\overrightarrow{OA}+\mu\overrightarrow{OB},\right|\lambda|+|\mu|\le 1,\lambda,\mu\in R\}$ 所表示的区域的面积是（　　）

（A）$2\sqrt{2}$　　（B）$2\sqrt{3}$　　（C）$4\sqrt{2}$　　（D）$4\sqrt{3}$

3、**（2013 北京理 14）** 向量 $A(1,-1)$，$B(3,0)$，$C(2,1)$，若平面区域 D 由所有满足 $\overrightarrow{AP}=\lambda\overrightarrow{AB}+\mu\overrightarrow{AC}$（$1\le\lambda\le 2$，$0\le\mu\le 1$）的点 P 组成，则 D 的面积为__________

4、()