2018年协作体数学奥林匹克夏令营O水平考试

7月24日　8:30~10:30

湖北　黄冈中学

填空题（每小题7分，共140分）

1. 已知命题P：$-2\le x+1\le 4$，命题Q：$x^2\le a$．若命题P是命题Q的充分非必要条件，则实数a的取值范围是____________.

2. 若正整数a,b互素，且$a<b$，$ab=31!$，则数对(a,b)共有________对.

3. 在一个平面凹四边形$ABCD$中，已知$\angle A=\angle B=\angle C=30^\circ$, $AB=2$, $BC=\sqrt{3}$，则四边形$ABCD$的面积是________.

4. 已知复数z在复平面上对应的点在第四象限．若$|z|=|z-\overline{z}|=1$，则$z(2+\overline{z}\,\mathrm{i})=$__________.

5. 已知正四棱锥$O-ABCD$的底面积是$6\sqrt{2}$．对正方形$ABCD$边界上任意一点P，记$\theta(P)$是直线OP与底面所成夹角的大小．若$\theta(P)$的最大值与最小值分别是α和β，且$\alpha+\beta=\dfrac{\pi}{2}$，则该正四棱锥的体积是__________.

6. 已知函数$f(x)=\left|\log_{2018}x\right|$．若实数$a,b$满足$f(a)=\dfrac{3}{2}f(b)$，且$0<a<1<b$，则$64a+3b$的最小值是__________.

7. 从$1,2,3,4,5,6,7$中选出若干个数（至少选2个），记事件A表示“这些数的平方和是奇数且这些数的积是偶数”，则事件A发生的概率为________.

8. 设实数k满足$|k|<1$，直线$y=x+k$与抛物线$y=-x^2+1$相交于A,B两点，点C的坐标为$(1,0)$，则三角形ABC的面积的最大值是________.

9. 若实数x,y满足$x^3+9x^2+28x+31=0,\ y^3-12y^2+49y-69=0$，则$x+y=$__________.

10. 若实数$x,y,z\in[0,1]$，则$|3x+4y-5z|+|3x-4y+5z|+|-3x+4y+5z|$的最大值为__________.

11. 已知$x_1,x_2,\cdots,x_{18}\in[-1,+\infty)$，且$x_1^3+x_2^3+\cdots+x_{18}^3=0$，则$x_1^2+x_2^2+\cdots+x_{18}^2$的最大值为_________.

12. 关于x,y的方程组$\begin{cases}\cot(\pi x)\cdot\tan(\pi y)=1,\\ x^2+y^2=100\end{cases}$的实数解有__________组.

13. 已知ΔABC的三个内角分别是A,B,C，它们的对边分别是a,b,c．如果

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{4\cos(A-5C)}{a+b}=0,$$

那么A的大小是__________.

14. 已知锐角三角形ABC的三个内角分别为A,B,C，向量$\vec{p},\vec{q}$在平面直角坐标系中的坐标分别为：$\vec{p}=\left(2-2\sin A,\cos A+\sin A\right),\vec{q}=\left(\sin A-\cos A,\ 1+\sin A\right)$，若$\vec{p}\parallel\vec{q}$，则$2\sin^2 B+\cos\dfrac{C-3B}{2}$的取值范围是____________________.

15. 已知正项数列$\{a_n\}$满足$a_1=1$，

$$a_na_{n+1}=\frac{a_{n+1}^{\lg a_{n+1}}}{a_n^{\lg a_n}}\neq 1,\ n=1,2,3,\cdots.$$

如果$\dfrac{1}{a_1}+\dfrac{2}{a_2}+\cdots+\dfrac{m}{a_m}<\lambda$对任意的正整数$m$成立，则$\lambda$的最小值是__________ .

16. 已知空间向量$\vec{a},\vec{b},\vec{c}$两两的夹角是60°，且$|\vec{a}|=1$，$|\vec{b}|=2$，$|\vec{c}|=4$. 已知向量$\vec{u},\vec{v}$满足$\vec{u}\cdot(\vec{u}+\vec{a})=\vec{u}\cdot\vec{b}$，$\vec{v}\cdot(\vec{v}+\vec{a})=\vec{v}\cdot\vec{c}$，则$|\vec{u}-\vec{v}|$的最大值是__________.

17. 将函数$f(x)=\sin 2x$的图像向右平移$\varphi(0<\varphi<\dfrac{\pi}{2})$个单位后得到函数$g(x)$的图像. 若$\left(x_1,x_2\right)$取遍满足$\left|f(x_1)-g(x_2)\right|=2$的有序实数对时，$\left|x_1-x_2\right|$的最小值是$\dfrac{\pi}{5}$，则$\varphi=$__________.

18. 已知双曲线C的右焦点是F，左准线是l，离心率是e. 另一抛物线Γ也恰好以点F和直线l为焦点和准线. 若双曲线C与抛物线Γ有公共点，则e的取值范围是__________.

19. 设$f(u)=\left[\dfrac{u+1}{2}\right]+\left[\dfrac{u+2}{2}\right]+\left[\dfrac{u+3}{2}\right]$，这里，$[u]$表示不超过实数$u$的最大整数. 则点集$\left\{(x,y)\,\middle|\,|x|\le 100,\ |y|\le 100,\text{且}3\mid f(x)+f(y)\right\}$的面积为__________.

20. 已知数列$\left\{x_n\right\}$满足：$x_1=x_2=\cdots=x_{10}=0,x_{11}=2$，并且

$$x_{n+11}=x_{n+5}+2x_n,\quad n=1,2,\cdots.$$

则$x_{111}=$___________.