平面向量中的“等势线”研究

◎金志春 （常熟市梅李高级中学 215500）

【摘要】归纳总结了向量共线定理及其推广的应用，建立了“等势线”的概念并研究其性质.

【关键词】向量；共线定理；等势线

向量本身是数与形的完美结合的典范，一方面通过数形结合来研究向量的概念和运算；另一方面.我们又以向量为工具，数形结合地解决数学的有关问题.笔者经过多年的教学发现，向量特别是线性表示运算是学生们较为头疼的一类问题，本文就这类问题进行阐述，并从苏教版课本必修四《向量》中一道例题出发，结合多道例题进行探讨向量共线定理推广的应用；该题引出了向量共线定理的推广，也为我们建立“等势线”概念奠定了基础.

原题：如图1，$\triangle OAB$ 中，C 为直线 AB 上一点，若 $\overrightarrow{AC}=\lambda\overrightarrow{CB}(\lambda\neq-1)$.求证：$\overrightarrow{OC}=\dfrac{\overrightarrow{OA}+\lambda\overrightarrow{OB}}{1+\lambda}$.

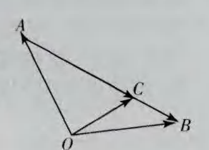

图 1

解析 因为 $\overrightarrow{AC}=\lambda\overrightarrow{CB}$，

所以 $\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OA}=\lambda(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OC})$，

即 $(1+\lambda)\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OA}+\lambda\overrightarrow{OB}$.

又因为 $\lambda\neq-1$，即 $1+\lambda\neq0$，

所以 $\overrightarrow{OC}=\dfrac{\overrightarrow{OA}+\lambda\overrightarrow{OB}}{1+\lambda}$.

反之，亦成立.易得到向量共线定理的一个推论（以下简称三点共线推论）：设 $\overrightarrow{OA}$，$\overrightarrow{OB}$ 是平面内不共线的两个向量，则点 A,B,C 三点共线的充要条件是存在唯一一对实数 α,β，使得 $\overrightarrow{OC}=\alpha\overrightarrow{OA}+\beta\overrightarrow{OB}(\alpha+\beta=1)$.

利用这个推论，可以较为轻松的解决两类问题：一是求系数和问题，二是求三点共线问题.若我们能利用好此推论，则可以在这两类问题中省去很多添辅助线和证明过程.本文主要谈谈第一种问题.

例1 如图2.在 $\square ABCD$ 中，E 和 F 分别是边 CD 和 BC 的中点，若 $\overrightarrow{AC}=\lambda\overrightarrow{AE}+\mu\overrightarrow{AF}$，其中 $\lambda,\mu\in\mathbf{R}$，$\lambda+\mu=$________.

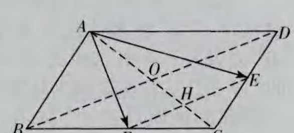

图 2

分析 连接 EF，BD 分别交 AC 于点 H，O.

因为 E,F,H 三点共线，

所以 $\overrightarrow{AH}=\alpha\overrightarrow{AE}+\beta\overrightarrow{AF}\quad(\alpha+\beta=1)$.

易证 H 为 OC 中点，所以 $\overrightarrow{AH}=\dfrac{3}{4}\overrightarrow{AC}$.

因此 $\overrightarrow{AC}=\dfrac{4}{3}\alpha\overrightarrow{AE}+\dfrac{4}{3}\beta\overrightarrow{AF}$.

所以 $\lambda+\mu=\dfrac{4}{3}\alpha+\dfrac{4}{3}\beta=\dfrac{4}{3}$.

点评 这里先由 E,F,H 三点共线推论得 $\overrightarrow{AH}$ 用 $\overrightarrow{AE}$ 和 $\overrightarrow{AF}$ 线性表示，系数之和为1，再由 $\overrightarrow{AH}$ 与 $\overrightarrow{AC}$ 为共线向量，得其线性关系，两者联立，大功告成.

例2 给定两个长度为1的平面向量 $\overrightarrow{OA}$，$\overrightarrow{OB}$，他们的夹角为 $120°$，如图3所示，点 C 在以 O 为圆心的圆弧 $\overset{\frown}{AB}$ 上变动，若 $\overrightarrow{OC}=x\overrightarrow{OA}+y\overrightarrow{OB}$，其中 $x,y\in\mathbf{R}$，则 $x+y$ 的最大值是________.

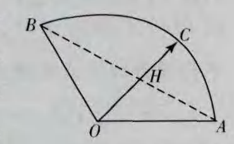

图 3

分析 连接 AB 交 OC 于点 H，

则由因为 A,B,H 三点共线，

所以 $\overrightarrow{OH}=\alpha\overrightarrow{OA}+\beta\overrightarrow{OB}(\alpha+\beta=1)$.

又因为 O,C,H 三点共线，

所以 $\overrightarrow{OH}=\lambda\overrightarrow{OC}$，$\lambda\in(0,1]$，即 $\overrightarrow{OC}=\dfrac{\alpha}{\lambda}\overrightarrow{OA}+\dfrac{\beta}{\lambda}\overrightarrow{OB}$.

因此 $x+y=\dfrac{\alpha}{\lambda}+\dfrac{\beta}{\lambda}=\dfrac{\alpha+\beta}{\lambda}=\dfrac{1}{\lambda}$.

且 $\lambda=\dfrac{|\overrightarrow{OH}|}{|\overrightarrow{OC}|}=|\overrightarrow{OH}|$，由 O 到 AB 的距离为 $\dfrac{1}{2}$ 知，$\lambda\in\left[\dfrac{1}{2},1\right]$.

所以 $x+y$ 的最大值为2.

事实上，以上两题的解法也是众多解法中比较简单的，然而山外有山，笔者在研究了例题3基础上，发现一种更为简洁的解法.

例3 如图4所示，两射线 OA 和 OB 交于 O，给出下列向量：①$\overrightarrow{OA}+2\overrightarrow{OB}$；②$\dfrac{3}{4}\overrightarrow{OA}+\dfrac{1}{3}\overrightarrow{OB}$；③$\dfrac{1}{2}\overrightarrow{OA}+\dfrac{1}{3}\overrightarrow{OB}$；④$\dfrac{3}{4}\overrightarrow{OA}+\dfrac{1}{5}\overrightarrow{OB}$；⑤$\dfrac{3}{4}\overrightarrow{OA}-\dfrac{1}{5}\overrightarrow{OB}$ 这些向量中以 O 为起点，终点在阴影区域内的是________.（写出所有符合要求的向量的序号）

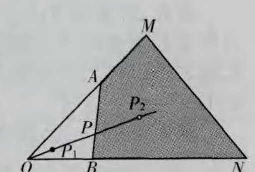

图 4

分析 在 AB 上取一点 P，作射线 OP.

在线段 OP 上取一点 P_1，线段 OP 外取一点 P_2，$\overrightarrow{OP}=\alpha\overrightarrow{OA}+\beta\overrightarrow{OB}$，$(\alpha+\beta=1)$.

点 P_2 在阴影部分中，由 O,P,P_2 三点共线知，$\overrightarrow{OP_2}=\lambda\overrightarrow{OP}$，

且 $\lambda=\dfrac{|\overrightarrow{OP_2}|}{|\overrightarrow{OP}|}>1$，所以 $\overrightarrow{OP_2}=\lambda\overrightarrow{OP}=\lambda\alpha\overrightarrow{OA}+\lambda\beta\overrightarrow{OB}$，

因此系数和 $\lambda a+\lambda b=\lambda(\alpha+\beta)=\lambda>1$ 所以只能选①②.

同理可得，当点 P_1 线段 OP 上时，则 $\overrightarrow{OP_1}=\mu\overrightarrow{OP}=\mu\alpha\overrightarrow{OA}+\mu\beta\overrightarrow{OB}$，$\mu<1$，所以系数之和小于1.

将此题进行推广，当点 P 取在直线 AB 上时，$\overrightarrow{OP}=x\overrightarrow{OA}+y\overrightarrow{OB}$，则 $x+y=1$；当点 O,P 位于直线 AB 的两侧时，形成的 $\overrightarrow{OP}=x\overrightarrow{OA}+y\overrightarrow{OB}$，系数和 $x+y>1$；当点 O,P 位于直线 AB 的同侧时，形成的 $\overrightarrow{OP}=x\overrightarrow{OA}+y\overrightarrow{OB}$，系数和 $x+y<1$.如图5

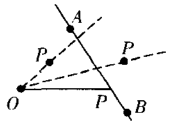

图 5

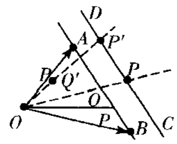

图 6

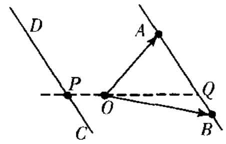

图 7

若在 AB 的平行线 CD 上任取一点 P，如图 6 所示，$\overrightarrow{OP}=x\overrightarrow{OA}+y\overrightarrow{OB}$，则系数和 $x+y$ 等于一个常数，证明如下：在直线 CD 上任取一点 P'，线段 OP,OP' 交直线 AB 于 Q,Q'，由平行线分线段成比例可知 $\frac{|\overrightarrow{OP}|}{|\overrightarrow{OQ}|}=\frac{|\overrightarrow{OP'}|}{|\overrightarrow{OQ'}|}=\lambda$，则 $\overrightarrow{OP}=\lambda\overrightarrow{OQ}=\lambda\alpha\overrightarrow{OA}+\lambda\beta\overrightarrow{OB}$，其中 $\alpha+\beta=1$，所以系数和 $x+y=\lambda\alpha+\lambda\beta=\lambda(\alpha+\beta)=\lambda$；同理可得 $\overrightarrow{OP'}=\overrightarrow{OQ'}=\lambda s\overrightarrow{OA}+\lambda t\overrightarrow{OB}$，其中 $s+t=1$，所以系数和 $x+y=\lambda s+\lambda t=\lambda$；证毕.

像这样平行于 AB 的直线有无数条，笔者把这样的直线叫做"等势线"，由上面证明知"等势线"上任意一点 P，$\overrightarrow{OP}=x\overrightarrow{OA}+y\overrightarrow{OB}$，$x,y\in\mathbf{R}$，系数和 $x+y$ 为定值. 且点 O 与"等势线"位于直线 AB 两侧时，系数和大于 1，两者距离越远，系数和越大；当"等势线"位于直线 AB 上时，系数和 $x+y=1$；当点 O 与"等势线"位于直线 AB 同侧时，要分三种情况进行讨论：

①"等势线"位于点 O 与直线 AB 之间时，$\frac{|\overrightarrow{OP}|}{|\overrightarrow{OQ}|}=\lambda\in(0,1)$，则由 $\overrightarrow{OP}=\lambda\overrightarrow{OQ}=\lambda\alpha\overrightarrow{OA}+\lambda\beta\overrightarrow{OB}$，其中 $\alpha+\beta=1$，所以系数和 $x+y=\lambda\in(0,1)$.

②"等势线"位于点 O，系数和 $x+y=0$.

③点 O 位于"等势线"与直线 AB 之间，如图 7，系数之和 $x+y=\lambda<0$（λ 为定值）.

若将上述结论用于例题 1，延长 AE 交过点 C 的"等势线"于点 G，则 $\overrightarrow{AG}=x\overrightarrow{AE}+y\overrightarrow{AF}$，由于 $\overrightarrow{AG}$ 与 $\overrightarrow{AE}$ 共线，所以 $y=0$，由"等势线"概念可知，$EF//CG$，所以 $\frac{|\overrightarrow{AE}|}{|\overrightarrow{AG}|}=\frac{|\overrightarrow{AH}|}{|\overrightarrow{AC}|}=\frac{3}{4}$，因此 $\overrightarrow{AG}=\frac{4}{3}\overrightarrow{AE}$，最后 $\lambda+\mu=x+y=\frac{4}{3}$.

例题 2 也可用"等势线"性质求解，系数和取得最大值时"等势线"恰为半圆的切线，由对称性易得 C 为 $\overset{\frown}{AB}$ 的中点，连接 AC,BC 得四边形 $OACB$ 为平行四边形. 所以此时 $\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}$，系数和 $x+y=1+1=2$.

在此基础上，笔者发现等势线的运用起来非常方便，绝大部分系数之和问题可以再很短的时间内看出结论，

课本中的每一个例题、习题的设置都有其目的和作用. 体现着本节知识所应达到的能力要求，我们不仅要紧扣课本，认识到认真钻研课本的重要性，突出课本基础知识的作用突出课本例题中数学思想方法的挖掘和应用，也要重视课本习题潜在功能的挖掘和利用，指导学生回归课本，依"纲"固"本"，挖掘课本的潜在功能，对课本典型问题进行引申、推广，发挥其应有的作用，这与高考命题的"源于课本，高于课本"的理念是相吻合的.

（上接 150 页）

为自然数总量的 $\frac{8}{30}$，又知 7 起素数整体有效排除力总和为 $>\frac{8}{30}$. 那么，得：$\frac{8}{30}-\left(>\frac{8}{30}\right)=(>0)$.

因此，经素数 2,3,5 有效排除后，7 起的奇素数不能做到将某高数起的个位数为 1,3,7,9 的奇数全部有效排除出素数之外. 所以，个位数为 1,3,7,9 的奇素数不可穷尽. 此证 1.

证明方法 2　已知经 2,3,5 的有效排除后，个位数为 1,3,7,9 的奇数各为自然数总量的 $\frac{2}{30}$，又知 7 起素数整体有效排除力总和为 $>\frac{8}{30}$. 事实证明，个位数为 1,3,7,9 的奇数乘于个位数为 1,3,7,9 的奇数，其积均为个位数为 1,3,7,9 的奇数. 事实又证明，个位数为 1,3,7,9 的素数对个位数为 1,3,7,9 的奇数进行有效排除，在被排除的量上都是均衡的. 因此，要将 7 起素数整体有效排除力总和 $\left(>\frac{8}{30}\right)$，须均分为 4 支有效排除力分别对个位数为 1,3,7,9 的奇数进行有效排除，其每支有效排除力为：$\left(>\frac{8}{30}\right)\div 4=\left(>\frac{2}{30}\right)$.

那么，得：$\frac{2}{30}-\left(>\frac{2}{30}\right)=(>0)$.

因此，经素数 2,3,5 有效排除后，7 起的奇素数不能做到将某高数起的个位数为 1,3,7,9 的奇数其中之一全部有效排除出素数之外. 所以，个位数为 1,3,7,9 的奇素数均不可穷尽. 此证 2.

四、对欧几里得证明疑点的原因分析

既然欧氏证明存在疑点，那么，欧几里得为什么会认定自己的证明是正确的呢？数学界及后人为什么会认同和接受欧氏证明呢？笔者认为，这当中原因除欧几里得本人受时代局限、数学界及后人迷信大数学家外，共同原因有三：

原因 1　没能将素数没有穷尽问题之研究，置于素数中"可穷尽"和"不可穷尽"现象去分析探讨，即没把注意力放在"筛"这个现象上，忽略了对"筛"的现象进行分析，忽视了有效"筛"（即有效排除）、重复"筛"（即重复排除）、多次重复"筛"（即无关排除）这些因素，没能真正找出素数中"可穷尽"和"不可穷尽"现象的根本原因，而是把注意力全放在"到最后有没有素数存在"这个问题上，简单地将求得"集合"之外的"更大素数"与证明素数没有穷尽问题画上等号，致使证明点错位.

原因 2　违反了人类认识事物的规律，漏缺了"再假设"这个环节，忽略了"集合"中素数"从小到大依次排列"这个条件.

人类认识事物的规律告诉我们，人类对某一无限事物的认识，是经过无数次对有限的认识来完成的，是通过"已知"去发现"未知"，使之成为新的"已知"，再以"已知"和新的"已知"去发现新的"未知". 欧几里得在设立素数没有穷尽问题的证明公式上，其不严谨之处恰恰在于违反了这个规律性，没有考虑到能否经得起"再假设"的验证问题，同时忽略了自身设置的"集合"中素数"从小到大依次排列"这个条件，没有将这个条件检验"集合"之外的"更大素数"是不是续接"集合"中的 P_n 素数的下一个素数，并由此验证证明的正确性. 而认同者们也犯了同样的错误.

原因 3　自觉或不自觉地掉进了"已知"的"陷阱".

依照素数"从小到大依次排列"这一条件，"集合"之外的素数都应是"未知"的（包括已知却不能做到从小到大依次排列的素数，都应属于"未知"范围）. 由于求得"集合"之外的这个"更大素数"不是续接"集合"中的 P_n 素数的下一个素数，因而此两个素数之间必定存在若干个素数. 此若干个素数是属于"未知"素数. 笔者说欧几里得和认同者自觉或不自觉地掉进"已知"的"陷阱"，是指他们将"集合"之外的"未知"素数，当"已知"素数来使用.